Pyramidi

Lukion pitkä matematiikka

Kertauskirja

Riitta Härkönen
Pekka Kontkanen | Jukka Lehtonen
Anja Ronkainen | Sisko Savolainen

Sanoma Pro Oy | Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-1188-3 Pyramidi Kertauskirja

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2453-1
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2452-4

Toimitus: Juho Niemelä
Typografia: Jari Koski ja Marika Maijala
Taitto: Eija Högman
Kansi: Marika Maijala Kannen kuva: Corbis/SKOY
Piirrokset: Pekka Könönen ja Eila Sinivuori

© Riitta Härkönen, Pekka Kontkanen, Jukka Lehtonen,
Anja Ronkainen, Sisko Savolainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

1 Luvut ja laskutoimitukset 7
1.1 Lukujoukot ja potenssi 7
1.2 Verrannollisuus 10
1.3 Prosentti ja prosenttiyksikkö 13
1.4 Itseisarvo 16
1.5 Juuret ja murtopotenssi 18
1.6 Polynomin jakaminen tekijöihin 21

2 Yhtälöt ja epäyhtälöt 24
2.1 Polynomiyhtälö ja -epäyhtälö 24
2.2 Rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö 33
2.3 Itseisarvoyhtälö ja -epäyhtälö 35
2.4 Neliöjuuriyhtälö ja -epäyhtälö 40
2.5 Trigonometriset yhtälöt 42
2.6 Yhtälöryhmä 51

3 Geometria 53
3.1 Tasogeometria 53
3.2 Avaruusgeometria 73

4 Analyyttinen geometria 82
4.1 Peruskäsitteitä 82
4.2 Suora 84
4.3 Ympyrä 90
4.4 Paraabeli 93

5 Vektorit 97
5.1 Peruskäsitteitä 97
5.2 Vektorit koordinaatistossa 101

6 Todennäköisyyslaskenta 115
6.1 Kombinatoriikkaa 115
6.2 Todennäköisyys 119
6.3 Jakauma 127

7 Differentiaalilaskenta 138
7.1 Funktio 138
7.2 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus 141
7.3 Derivaatta 148
7.4 Sovelluksia 165

8 Integraalilaskenta 175
8.1 Integraalifunktio 175
8.2 Määrätty integraali 180

9 Lukujonot ja summat 191
9.1 Peruskäsitteitä 191
9.2 Aritmeettinen lukujono ja summa 194
9.3 Geometrinen lukujono ja summa 197

Tehtäviä 201
Kevään 2007 ylioppilaskoe 279
Vastaukset 281
Hakemisto 299

Esipuhe

Pyramidi-sarjan *Kertauskirja* on lukion pitkän matematiikan kertauskurssin oppikirja. Kirjassa kerrataan pitkän matematiikan kymmenen pakollista kurssia. Kirja soveltuu käytettäväksi, vaikka pakollisilla kursseilla olisi ollut käytössä jokin muu kirjasarja.

Teoria koostuu pakollisten kurssien keskeisistä asioista. Lauseiden perusteluja ja todistuksia ei esitetä; ne löytyvät Pyramidin pakollisten kurssien kirjoista. Esimerkit auttavat teorian kertaamisessa, joten niitä on runsaasti.

Tehtävät on sijoitettu kirjan loppuun omaksi osiokseen. Tehtäväsivujen otsikointi noudattaa teoriaosan otsikointia. Laajoissa luvuissa on lisäksi koko lukuun liittyviä sekalaisia tehtäviä, joiden joukossa on paljon sekä lyhyen että pitkän matematiikan ylioppilastehtäviä. Tehtäviä on runsaasti, jotta niitä riittäisi myös kertauskurssin ja ylioppilaskirjoitusten väliselle tenttikaudelle itsenäiseen opiskeluun.

Tehtävissä ei ole vaikeustasoa osoittavia merkintöjä, vaan tehtävät on pyritty laittamaan vaikeusjärjestykseen. Jos tehtävä on ylioppilastehtävä, tehtävän tiedot (vuosi, kevät/syksy, tehtävänumero) on merkitty tehtävän perään hakasulkeisiin. Pieni kirjain (k tai s) tarkoittaa lyhyen ja iso kirjain (K tai S) pitkän matematiikan tehtävää; esimerkiksi [K04, 1] tarkoittaa kevään 2004 pitkän matematiikan tehtävää 1. Kirjan lopussa on harjoituskokeena kokonaisuudessaan kevään 2007 pitkän matematiikan ylioppilaskoe.

Kaikkien tehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut ovat erillisessä kirjassa *Kertauskirjan tehtävien ratkaisut*.

Toivotamme innostusta kertaamiseen ja menestystä ylioppilaskirjoituksiin!

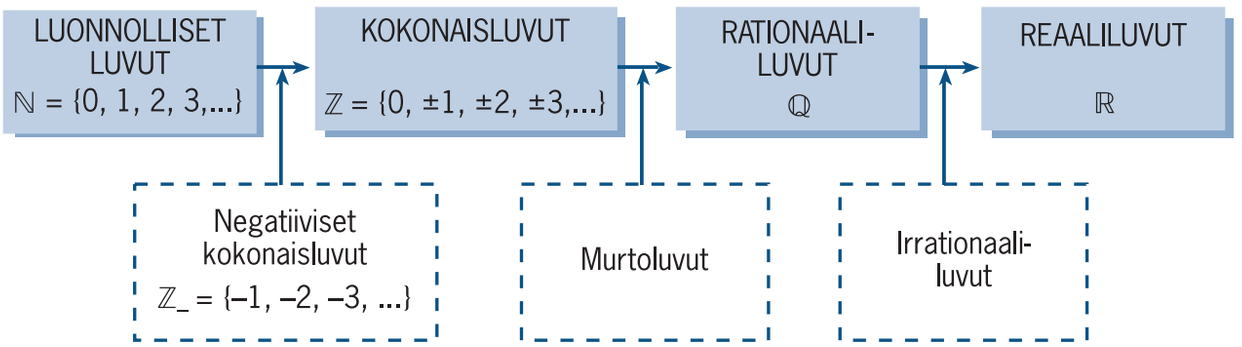
Helsingissä heinäkuussa 2007

Tekijät

1 Luvut ja laskutoimitukset

1.1 Lukujoukot ja potenssi

Lukujoukkoja voidaan havainnollistaa seuraavalla kaaviolla:



Luvun a, $a \in \mathbb{R}$,

vastaluku on $-a$

käänteisluku on $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$

Esimerkki 1 Olkoon $a > 0$ ja $b > 0$. Laske lukujen $-\frac{a^2}{b}$ ja b vastalukujen summan ja luvun $\frac{a+b}{b}$ käänteisluvun tulo.

Ratkaisu Luvun $-\frac{a^2}{b}$ vastaluku on $\frac{a^2}{b}$ ja luvun b vastaluku on $-b$.

Luvun $\frac{a+b}{b}$ käänteisluku on $\frac{b}{a+b}$. Tällöin

$$\left[\frac{a^2}{b} + (-b)\right] \cdot \frac{b}{a+b} = \left(\frac{a^2}{b} - {}^{b)}b\right) \cdot \frac{b}{a+b}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{b} \cdot \frac{b}{a+b} \qquad \left| a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \right.$$

$$= \frac{\cancel{(a+b)}(a-b) \cdot \cancel{b}}{\cancel{b} \cdot \cancel{(a+b)}} = a - b$$

Potenssin määritelmä ($n \in \mathbb{Z}_+$)

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$ $\qquad a^0 = 1$, kun $a \neq 0$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ tai yhtäpitävästi $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$, kun $a \neq 0$

Potenssien laskusääntöjä

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	samankantaisten potenssien tulo
$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	samankantaisten potenssien osamäärä
$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	potenssin potenssi
$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$	tulon potenssi
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$	osamäärän potenssi

$(-a)^n = a^n$, kun n on parillinen kokonaisluku

$(-a)^n = -a^n$, kun n on pariton kokonaisluku

Laskujärjestys

Elleivät sulkeet toisin määrää, noudatetaan seuraavaa laskujärjestystä:

1. potenssiinkorotus
2. kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
3. yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle.

Esimerkki 2

a) $2^2 \cdot 2^3 - (2^2)^3 = 2^{2+3} - 2^{2 \cdot 3} = 2^5 - 2^6 = -32$

b) $2^{2^4} = 2^{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{16} = 65\,536$

Esimerkki 3

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} - \frac{2}{3} : \frac{5}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 5}{3 \cdot \cancel{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = {}^{5)}\frac{5}{3} - \frac{4}{15} = \frac{25-4}{15} = \frac{21}{15}^{(3}$

$= \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \left({}^{3)}\frac{5}{2} - {}^{2)}\frac{2}{3} \right) : \frac{5}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{15-4}{6} : \frac{5}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \cdot \frac{11}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{22}{45}$

c) $\frac{2}{3} \cdot 5^2 - 10^3 \cdot 5^{-2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{3} - \overset{40}{\cancel{1000}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{25}}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{3} - 40 \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{50}{3} - \frac{80}{3} = \frac{-30}{3} = -10$

Esimerkki 4

$\frac{-x^4 \cdot (-y)^6}{x^{-3} \cdot y^5} : (-x)^7, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$

$= \frac{-x^4 \cdot \cancel{y^6}}{x^{-3} \cdot \underset{1}{\cancel{y^5}}} \cdot \frac{1}{(-x)^7} = \frac{-x^4 y}{x^{-3} \cdot (-x^7)}$

$= \frac{-x^4 y}{-x^{-3} \cdot x^7} = \frac{\cancel{x^4} y}{\cancel{x^4}} = y$

Esimerkki 5

a) $2^{4-2r} \cdot (-2^{2r-2}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\quad \left| \; a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r \right.$

$= -2^{4-2r} \cdot 2^{2r-2} \cdot 2^2$ $\quad \left| \; a^r \cdot a^s = a^{r+s} \right.$

$= -2^{4-2r+2r-2+2} = -2^4 = -16$

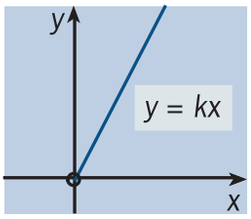
b) Kun k on kokonaisluku, niin

$2^{4-2k} \cdot (-2)^{2k-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad \left| \; 2k-2 \text{ parillinen luku} \right.$

$= 2^{4-2k} \cdot 2^{2k-2} \cdot 2^{-2} = 2^{4-2k+2k-2-2} = 2^0 = 1$

1.2 Verrannollisuus

Määritelmä



Muuttuja y on **suoraan verrannollinen** muuttujaan x, jos y saadaan kertomalla x vakiolla k, $k \neq 0$. Tämä verrannollisuus esitetään yhtälönä

$$y = kx \quad \text{eli} \quad \frac{y}{x} = k$$

Huomautuksia

- Muuttujien y ja x suoraan verrannollisuutta voidaan merkitä $y \sim x$ tai $y \propto x$.
- Sana *suoraan* voidaan jättää pois ja puhua vain *verrannollisuudesta*.

Kun y ja x ovat suoraan verrannolliset, niin $\frac{y}{x} = k$, joten

y	x
y_1	x_1
y_2	x_2

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{eli} \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

Esimerkki 1

Auton jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden 2. potenssiin. Jos nopeus on 100 km/h, on jarrutusmatka 60 m. Mikä on jarrutusmatka, jos nopeus on 60 km/h? [K88, 2b]

Ratkaisu

Merkitään jarrutusmatkaa kirjaimella s ja nopeutta kirjaimella v.

$$s \sim v^2$$

$$s = k \cdot v^2, \quad \text{vakio } k \neq 0$$

$$k = \frac{s}{v^2}$$

Saadaan yhtälö

$$\frac{s_1}{v_1^2} = \frac{s_2}{v_2^2} \qquad \left| \begin{array}{ll} s_1 = 60 \text{ (m)}, & v_1 = 100 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \\ s_2 = ?, & v_2 = 60 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \end{array} \right.$$

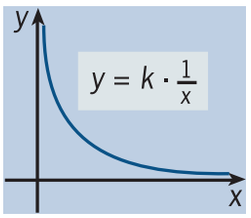
$$\frac{60}{100^2} = \frac{s_2}{60^2}$$

$$s_2 = \frac{60 \cdot 60^2}{100^2} = 21{,}6 \approx 22 \text{ (m)}$$

Vastaus

Jarrutusmatka on 22 m.

Määritelmä



Muuttuja y on **kääntäen verrannollinen** muuttujaan x, jos y saadaan kertomalla x:n käänteisluku $\frac{1}{x}$ vakiolla k, $k \neq 0$. Tämä verrannollisuus esitetään yhtälönä

$$y = k \cdot \frac{1}{x} \quad \text{eli} \quad yx = k$$

Huomautuksia

- Muuttujien y ja x kääntäen verrannollisuus voidaan merkitä $y \sim \frac{1}{x}$ tai $y \propto \frac{1}{x}$.
- Jos muuttuja y on kääntäen verrannollinen muuttujaan x, niin y on suoraan verrannollinen muuttujaan $\frac{1}{x}$.

Jos y ja x ovat kääntäen verrannolliset, niin

y	x
y_1	x_1
y_2	x_2

$$y_1x_1 = y_2x_2 \quad \text{eli} \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Esimerkki 2

Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen valolähteestä mitatun etäisyyden neliöön. Koulun käytävällä on viherkasvi 10,0 metrin päässä lampusta. Mille etäisyydelle lampusta kasvi on siirrettävä, jotta sen saama valaistus tulisi kaksinkertaiseksi?

Tapa 1

Merkitään valaistusvoimakkuutta kirjaimella y ja etäisyyttä kirjaimella x. Tällöin

$$y \sim \frac{1}{x^2}$$

$$y = k \cdot \frac{1}{x^2} \qquad \text{vakio } k \neq 0$$

$$k = y \cdot x^2$$

Saadaan yhtälö

$$y_1 x_1^2 = y_2 x_2^2 \qquad \left| \begin{array}{l} y_1 = a,\ x_1 = 10{,}0\ \text{(m)} \\ y_2 = 2a,\ x_2 = x\ \text{(m)} \end{array} \right.$$

$$a \cdot 10{,}0^2 = 2a \cdot x^2 \qquad | : a \ \ (a \neq 0)$$

$$100 = 2x^2$$

$$x^2 = 50$$

$$x = (\pm)\sqrt{50} \qquad | \ x > 0$$

$$x = \sqrt{50} \approx 7{,}1\ \text{(m)}$$

Vastaus Kasvi on siirrettävä 7,1 metrin etäisyydelle lampusta.

Tapa 2 Merkitään valaistusvoimakkuutta kirjaimella y ja etäisyyttä kirjaimella x. Laaditaan taulukko.

valaistus-voimak-kuus	etäisyy-den neliö
y	$10{,}0^2$
$2y$	x^2

Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, joten

$$\frac{\cancel{y}}{2\cancel{y}} = \frac{x^2}{10{,}0^2}$$

$$x^2 = 50$$

$$x = \pm\sqrt{50} \qquad | \ x > 0$$

$$x = \sqrt{50} \approx 7{,}1\ \text{(m)}$$

Vastaus Kasvi on siirrettävä 7,1 metrin etäisyydelle lampusta.

1.3 Prosentti ja prosenttiyksikkö

- p % luvusta a on $\frac{p}{100} \cdot a$
- luku a on luvusta b $\frac{a}{b} \cdot 100\ \%$
- Jos luku a kasvaa p %, niin saadaan luku $\left(1 + \frac{p}{100}\right)a$
- Jos luku a pienenee p %, niin saadaan luku $\left(1 - \frac{p}{100}\right)a$
- Kuinka monta prosenttia luku a on suurempi kuin luku b? $\frac{a-b}{b} \cdot 100\ \%$
- Kuinka monta prosenttia luku b on pienempi kuin luku a? $\frac{a-b}{a} \cdot 100\ \%$
- Jos tehtävässä ei ole annettu prosenttiin liittyvää perusarvoa, sitä merkitään jollakin kirjaimella.

Esimerkki 1

Työn arvonlisävero (alv) on 22 % työn verottomasta hinnasta. Asiakas maksaa työstä 488 euroa.

a) Mikä on työn veroton hinta?

b) Arvonlisäveroprosenttia alennetaan, jolloin asiakas maksaa samasta työstä 16 euroa vähemmän. Mikä on uusi arvonlisäveroprosentti?

Ratkaisu

a) Työn veroton hinta a (€)
Työn verollinen hinta $1{,}22a$ (€)

Toisaalta työn hinta on 488 €, joten saadaan yhtälö

$$1{,}22a = 488$$

$$a = \frac{488}{1{,}22} = 400\ (€)$$

b) Uusi verollinen hinta $488 - 16 = 472$ (€)

Arvonlisäveron määrä $472 - 400 = 72$ (€)

Arvonlisävero prosentteina $\frac{72}{400} \cdot 100\ \% = 18\ \%$

Vastaus

a) 400 € b) 18

Esimerkki 2

Henkilön palkasta menee veroa 35,0 %. Kuinka monta prosenttiyksikköä veroprosentti laskee, kun henkilö saa 5 % enemmän nettopalkkaa kuin aikaisemmin?

Ratkaisu

Bruttopalkka	a
Vero	$0{,}35a$
Nettopalkka	$a - 0{,}35a = 0{,}65a$
Uusi nettopalkka	$1{,}05 \cdot 0{,}65a$
Uusi veroprosentti	p

Toisaalta uusi nettopalkka on $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot a$.

Saadaan yhtälö

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot a = 1{,}05 \cdot 0{,}65a \qquad \Big| : a \ (\neq 0)$$

$$1 - \frac{p}{100} = 1{,}05 \cdot 0{,}65 \qquad \Big| \cdot 100$$

$$100 - p = 105 \cdot 0{,}65$$

$$p = 31{,}75$$

Veroprosentti laskee prosenttiyksikköinä

$$35{,}0 - 31{,}75 = 3{,}25$$

Esimerkki 3

Puutarhuri tarvitsee tuholaisten torjuntaan 1,5-prosenttista mäntysaippualiuosta. Hänellä on käytettävissään liuos, jossa on 20 % saippuaa ja loput vettä. Tästä saadaan sopiva torjuntaliuos vettä lisäämällä. Kuinka monta prosenttia liuoksen vesimäärä tällöin kasvaa? [K98, 4]

Ratkaisu

Alkuperäinen liuos	a (ℓ)
Saippua	$0{,}2a$
Vesi	$0{,}8a$
Uusi liuos	b (ℓ)
Saippua	$0{,}015b$
Vesi	$0{,}985b$

Saippuan määrä säilyy, joten saadaan yhtälö

$$0{,}2a = 0{,}015b$$

$$a = 0{,}075b$$

Liuoksen vesimäärä kasvaa prosentteina

$$\frac{0{,}985b - 0{,}8a}{0{,}8a} \cdot 100\ \% = \frac{0{,}985b - 0{,}8 \cdot 0{,}075b}{0{,}8 \cdot 0{,}075b} \cdot 100\ \%$$

$$= \frac{\cancel{b}(0{,}985 - 0{,}8 \cdot 0{,}075)}{0{,}8 \cdot 0{,}075\cancel{b}} \cdot 100\ \% \approx 1500\ \%$$

Esimerkki 4 Kun tavaran hintaa alennettiin 20 %, sen markkamääräinen myynti kasvoi 2,0 %. Kuinka monella prosentilla kasvoi myyty tavaramäärä? [S91, 3b]

Ratkaisu

Tavaran alkuperäinen yksikköhinta a

Alennettu yksikköhinta $a - \frac{20}{100}a = 0{,}8a$

Myyty määrä aluksi b

Myyty määrä lopuksi $\left(1 + \frac{p}{100}\right)b$

Myynti aluksi ab

Myynti lopuksi $ab + \frac{2{,}0}{100}ab = 1{,}02ab$

Toisaalta lopputilanteessa myynti on $0{,}8a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)b$.

Saadaan yhtälö

$$1{,}02ab = 0{,}8a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)b \qquad \Big| : ab \ (\neq 0)$$

$$1{,}02 = 0{,}8 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$1{,}02 = 0{,}8 + 0{,}8 \cdot \frac{p}{100}$$

$$1{,}02 = 0{,}8 + 0{,}008p$$

$$0{,}008p = 0{,}22$$

$$p = \frac{0{,}22}{0{,}008}$$

$$p = 27{,}5$$

Vastaus Myyty tavaramäärä kasvoi 27,5 %.

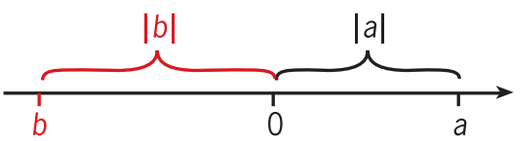
1.4 Itseisarvo

Reaaliluvun itseisarvo määritellään erikseen ei-negatiivisille ja negatiivisille luvuille.

Itseisarvon määritelmä

Reaaliluvun a **itseisarvo** on $|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0. \end{cases}$

Luvun a itseisarvo $|a|$ ilmoittaa lukusuoralla luvun a etäisyyden luvusta nolla.



Itseisarvon ominaisuuksia

$\|a\| \geq 0$	itseisarvon ei-negatiivisuus
$\|-a\| = \|a\|$	vastaluvun itseisarvo
$\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$	tulon itseisarvo
$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$	osamäärän itseisarvo
$\|a\|^2 = a^2$	itseisarvon neliö

Esimerkki 1 Sievennä lauseke $|-x^2| - |x^2 - a| + |ax - a|$, kun $-1 \leq a \leq 0$ ja $x > 1$.

Ratkaisu Tutkitaan lausekkeiden itseisarvot erikseen.

$|-x^2|$ | $|-a| = |a|$

$= |x^2|$ | $x^2 \geq 0$

$= x^2$

$|x^2 - a|$ | $x^2 \geq 0$ ja $-1 \leq a \leq 0$, joten $x^2 - a \geq 0$

$= x^2 - a$

$$
\begin{aligned}
&|ax - a| \\
&= |a(x-1)| && \big||ab| = |a||b|\big| \\
&= |a|\,|x-1| && \big|-1 \le a \le 0,\ x-1 > 0 \text{, koska } x > 1\big| \\
&= -a(x-1) \\
&= -ax + a
\end{aligned}
$$

Siis

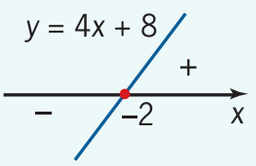
$$
\begin{aligned}
&|-x^2| - |x^2 - a| + |ax - a| \\
&= x^2 - (x^2 - a) + (-ax + a) \\
&= x^2 - x^2 + a - ax + a \\
&= 2a - ax
\end{aligned}
$$

Esimerkki 2 Esitä lauseke $x - 2x\,|4x + 8| - 2$ ilman itseisarvomerkkejä.

Ratkaisu Selvitetään ensin itseisarvon sisällä olevan lausekkeen merkki.

Nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
4x + 8 &= 0 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$



Tarkastellaan lauseketta kummassakin osa-alueessa erikseen:

1 Kun $x < -2$, saadaan

$$
\begin{aligned}
&x - 2x(-4x - 8) - 2 \\
&= x + 8x^2 + 16x - 2 \\
&= 8x^2 + 17x - 2
\end{aligned}
$$

2 Kun $x \ge -2$, saadaan

$$
\begin{aligned}
&x - 2x(4x + 8) - 2 \\
&= x - 8x^2 - 16x - 2 \\
&= -8x^2 - 15x - 2
\end{aligned}
$$

Vastaus

$$
x - 2x|4x + 8| - 2 = \begin{cases} 8x^2 + 17x - 2, & \text{kun } x < -2 \\ -8x^2 - 15x - 2, & \text{kun } x \ge -2 \end{cases}
$$

1.5 Juuret ja murtopotenssi

Neliöjuuren ominaisuuksia

1. $\sqrt{a} \geq 0$	neliöjuuren ei-negatiivisuus
2. $(\sqrt{a})^2 = a$	neliöjuuren neliö
3. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	tulon neliöjuuri
4. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	osamäärän neliöjuuri
5. $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	neliön neliöjuuri
6. $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b$	neliöjuurten suuruusjärjestys

Esimerkki 1 Laske.

a) $(\sqrt{18} + \sqrt{20}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5})$

b) $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2-\sqrt{2}}\right) : \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Ratkaisu

a) $(\sqrt{18} + \sqrt{20}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5})$

$= (\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 5}) \cdot (\sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5})$

$= (3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5})$

$= (3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) \quad \left| (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \right.$

$= (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2$

b) $\left(\sqrt{2} - \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) : \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \left| (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \right.$

$= \left(\sqrt{2} - \frac{2+\sqrt{2}}{4-2}\right) \cdot \frac{2}{1+\sqrt{2}}$

$= \left(\frac{2}{2}\sqrt{2} - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1} \quad \left| (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \right.$

$= \frac{2\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{2(1-\sqrt{2})}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \cdot \frac{2(1-\sqrt{2})}{-1}$

$= (\sqrt{2} - 2)(-1 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2 + 2 - 2\sqrt{2} = 4 - 3\sqrt{2}$

Esimerkki 2 Sievennä lauseke $\dfrac{\sqrt{(a-1)^3}}{\sqrt{a-1}}$.

Ratkaisu

$$\frac{\sqrt{(a-1)^3}}{\sqrt{a-1}}$$

Määritelty, kun $a > 1$, sillä juurrettavien pitää olla ei-negatiivisia ja nimittäjän eri suuri kuin nolla.

$$= \sqrt{\frac{(a-1)^3}{a-1}} = \sqrt{(a-1)^2}$$

neliön neliöjuuri: $\sqrt{a^2} = |a|$

$$= |a-1|$$

$a - 1 > 0$, koska $a > 1$

$$= a - 1, \quad a > 1$$

Juurten ominaisuuksia

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad \text{kun } n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \qquad \text{kun } n = 2, 4, 6, \ldots$$

Murtopotenssin määritelmä

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ kun } a > 0,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ \frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$$

Esimerkki 3 Sievennä lauseke $\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$. [S00, 1b]

Ratkaisu

$$\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$$

$$= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^5}$$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$$= \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{a^6}$$

$\sqrt[n]{a^n} = a$, kun $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$= a - \sqrt[3]{(a^2)^3}$$

$\sqrt[n]{a^n} = a$, kun $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$= a - a^2$$

Esimerkki 4 Määritä lausekkeen $2\sqrt[4]{3}\,a^{\frac{3}{2}} - a^3$ tarkka arvo, kun $a = \sqrt[6]{3}$. [S81, 1]

Ratkaisu

$$2\sqrt[4]{3}\,a^{\frac{3}{2}} - a^3 \qquad \left| \; a = \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}} \right.$$

$$= 2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^3 \qquad \left| \; (a^r)^s = a^{r \cdot s} \right.$$

$$= 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{2}} \qquad \left| \; a^r \cdot a^s = a^{r+s} \right.$$

$$= 2 \cdot 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} \qquad \left| \; 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \right.$$

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

Esimerkki 5 Tutki, onko $\sqrt{57 - 12\sqrt{15}} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$.

Ratkaisu Neliöjuuren määritelmän mukaan $\sqrt{a} = b$, jos ja vain jos 1) $b \geq 0$ ja 2) $b^2 = a$.

Merkitään $a = 57 - 12\sqrt{15}$ ja $b = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$.

- $b = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} > 0$, joten ehto 1 on voimassa.
- $b^2 = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2$
  $= (2\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2$
  $= 12 + 12\sqrt{15} + 45$
  $= 57 + 12\sqrt{15}$ $\qquad \left| \; a = 57 - 12\sqrt{15} \right.$
  $\neq a$

  joten ehto 2 ei ole voimassa.

Vastaus Ei ole.

1.6 Polynomin jakaminen tekijöihin

1 Yhteinen tekijä

$$ab + ac = a(b + c)$$

2 Muistikaavat

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

taulukkokirjasta

3 Ryhmittely

$$\underbrace{ax + bx}_{\substack{x \text{ yhteiseksi} \\ \text{tekijäksi}}} + \underbrace{ay + by}_{\substack{y \text{ yhteiseksi} \\ \text{tekijäksi}}} = \underbrace{x(a + b) + y(a + b)}_{\substack{a + b \text{ yhteiseksi} \\ \text{tekijäksi}}} = (a + b)(x + y)$$

4 Tekijöihin jakaminen polynomin nollakohtien avulla

- Jos a on $P(x)$:n nollakohta eli $P(a) = 0$, niin $P(x)$:n tekijänä on $(x - a)$ eli $P(x)$ on jaollinen $(x - a)$:lla.

Kääntäen:

- Jos $P(x)$:n tekijänä on $(x - a)$ eli $P(x)$ on jaollinen $(x - a)$:lla, niin a on $P(x)$:n nollakohta eli $P(a) = 0$.
- Polynomin $P(x)$ tekijänä on ensimmäisen asteen binomi $ax + b$, $a \neq 0$, jos ja vain jos binomin nollakohta on myös polynomin nollakohta.
- Jos x_1 ja x_2 ovat polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat, niin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Yleinen, astetta n oleva polynomi voidaan jakaa tekijöihin nollakohtiensa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avulla vastaavalla tavalla, eli

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$= a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Jos tässä tulossa esiintyy sama tekijä täsmälleen k kertaa, niin tämän tekijän nollakohtaa sanotaan **polynomin k-kertaiseksi nollakohdaksi.**

Esimerkki 1 Sievennä rationaalilauseke.

a) $\dfrac{x^2-4}{2x-x^2}$ b) $\dfrac{x^4-2x^3+x^2}{x^3-x}$ c) $\dfrac{-6x^3+4x^2+3x-2}{3x-2}$

Ratkaisu

a) $\dfrac{x^2-4}{2x-x^2}$

$2x - x^2 \neq 0$
$x(2-x) \neq 0$
$x \neq 0$ ja $x \neq 2$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x(2-x)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{-x(x-2)}$$

$$= \frac{x+2}{-x}$$

$$= -\frac{x+2}{x}, \quad x \neq 0, \quad x \neq 2$$

b) $\dfrac{x^4-2x^3+x^2}{x^3-x}$

$x^3 - x \neq 0$
$x(x^2-1) \neq 0$
$x \neq 0$ ja $x \neq \pm 1$

$$= \frac{x^2(x^2-2x+1)}{x(x^2-1)}$$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$= \frac{x(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x(x-1)}{x+1}$$

$$= \frac{x^2-x}{x+1}, \; x \neq 0, \quad x \neq \pm 1$$

c) $\dfrac{-6x^3+4x^2+3x-2}{3x-2}$

$3x - 2 \neq 0$
$x \neq \frac{2}{3}$
ryhmittely

$$= \frac{-2x^2(3x-2)+1\cdot(3x-2)}{3x-2}$$

yhteinen tekijä

$$= \frac{(3x-2)(-2x^2+1)}{3x-2}$$

$$= -2x^2+1, \quad x \neq \frac{2}{3}$$

Esimerkki 2

Polynomi $P(x) = x^2 - x + a$ on jaollinen binomilla $x - 3$.

a) Määritä parametri a ja polynomi $P(x)$.

b) Sievennä $\dfrac{P(x)}{x-3}$.

Ratkaisu

a) Koska $P(x)$ on jaollinen $(x - 3)$:lla, niin $x - 3$ on $P(x)$:n tekijä. Tällöin 3 on $P(x)$:n nollakohta. Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} P(3) &= 0 \\ 3^2 - 3 + a &= 0 \\ a &= -6 \end{aligned}$$

Siis $P(x) = x^2 - x - 6$.

b) Sievennetään lauseke $\dfrac{P(x)}{x-3} = \dfrac{x^2 - x - 6}{x-3}$, kun $x \neq 3$.

Osoittajan nollakohdat:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = 3 \text{ tai } x = -2$$

Siis

$$\frac{x^2 - x - 6}{x-3} \qquad \left| \; ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \right.$$

$$= \frac{1 \cdot (x-3)[x-(-2)]}{x-3}$$

$$= x + 2, \quad x \neq 3$$

Esimerkki 3

Määritä tulomuodossa seitsemännen asteen polynomi, jonka korkeimman asteen termin kerroin on -2 ja jonka nollakohdat ovat -3, 5 ja 6. Näistä -3 on kaksinkertainen ja 5 nelinkertainen nollakohta.

Ratkaisu

$$P(x) = a(x - x_1)^2(x - x_2)^4(x - x_3) \qquad \left| \begin{array}{l} a = -2 \\ x_1 = -3 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 6 \end{array} \right.$$

$$= -2(x + 3)^2(x - 5)^4(x - 6)$$

2 Yhtälöt ja epäyhtälöt

2.1 Polynomiyhtälö ja -epäyhtälö

ENSIMMÄINEN ASTE

Ensimmäisen asteen yhtälöksi sanotaan yhtälöä, joka voidaan esittää muodossa $ax + b = 0$, jossa $a \neq 0$.

Vastaavasti **ensimmäisen asteen epäyhtälö** saadaan korvaamalla ensimmäisen asteen yhtälön yhtäsuuruusmerkki jollakin epäyhtälömerkillä. Jos epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta on käännettävä, jotta epäyhtälöiden yhtäpitävyys säilyy.

Esimerkki 1 Ratkaise yhtälö. a) $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{4} = 2$ b) $1 - \frac{1-x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x}{2} + \frac{2}{3}$

Ratkaisu

a) $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{4} = 2 \quad \big| \cdot 12$

$$\begin{aligned} 4x - 3(x-4) &= 24 \\ 4x - 3x + 12 &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

b) $1 - \frac{1-x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \quad \big| \cdot 6$

$$\begin{aligned} 6 - 2(1-x) + x &= 3x + 4 \\ 6 - 2 + 2x + x &= 3x + 4 \\ 3x + 4 &= 3x + 4 \\ 0 &= 0 \qquad \text{aina tosi} \end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla eli kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 2 Osoita, että $x = 1$ ei ole yhtälön $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{1+x}{6}$ ratkaisu.

Ratkaisu **Todistus.** Sijoitetaan $x = 1$ erikseen yhtälön molemmille puolille.

vasen puoli on $\frac{1}{3} - \frac{1-4}{2} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{6} + \frac{9}{6} = \frac{11}{6}$ ja

oikea puoli on $\frac{1+1}{6} = \frac{2}{6}$

Koska vasemman puolen arvo ei ole sama kuin oikean puolen arvo, niin $x = 1$ ei ole yhtälön ratkaisu. □

Esimerkki 3 Ratkaise epäyhtälö $\frac{x}{5} - 1 > x - \frac{x+1}{5}$.

Ratkaisu

$$\frac{x}{5} - 1 > x - \frac{x+1}{5} \qquad \Big| \cdot 5 \ (> 0)$$

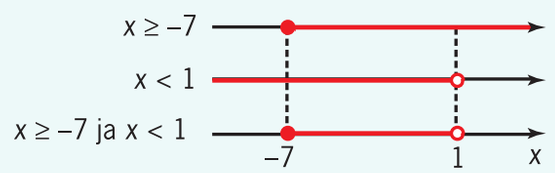
$$x - 5 > 5x - (x + 1)$$
$$x - 5 > 5x - x - 1$$
$$x - 5 > 4x - 1$$
$$-3x > 4 \qquad \Big| : (-3) \ (< 0)$$
$$x < -\frac{4}{3}$$

Esimerkki 4 Ratkaise kaksoisepäyhtälö $2x - 3 \le 3x + 4 < 8 - x$.

Ratkaisu

$$2x - 3 \le 3x + 4 < 8 - x$$

$2x - 3 \le 3x + 4$	ja	$3x + 4 < 8 - x$
$-x \le 7$	ja	$4x < 4$
$x \ge -7$	ja	$x < 1$



Vastaus $-7 \le x < 1$

TOINEN ASTE

Toisen asteen yhtälö on muotoa

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

ja se ratkaistaan käyttämällä neliöjuuren määritelmää, tulon nollasääntöä tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava on

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esimerkki 5 Ratkaise yhtälö. a) $2x^2 = 16$ b) $x^2 = ax$ c) $-x^2 + 4x - 1 = 0$

Ratkaisu

a) $2x^2 = 16 \quad | : 2$

$x^2 = 8$

$x = \pm\sqrt{8}$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

b) $x^2 = ax$

$x^2 - ax = 0$

$x(x - a) = 0 \quad |$ tulon nollasääntö

$x = 0$ tai $x - a = 0$

$x = 0$ tai $x = a$

c) $-x^2 + 4x - 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{-2(2 \mp \sqrt{3})}{-2} = 2 \mp \sqrt{3}$$

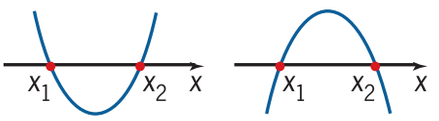
$x = 2 - \sqrt{3}$ tai $x = 2 + \sqrt{3}$

DISKRIMINANTTI

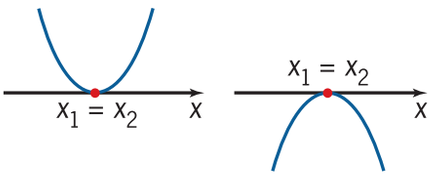
Lauseketta $b^2 - 4ac$ sanotaan diskriminantiksi ja sitä merkitään kirjaimella D.

Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, reaalijuurien määrä on

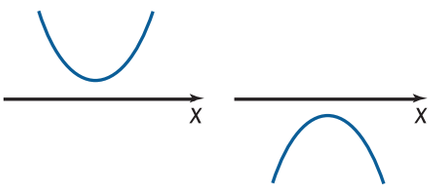
- kaksi, jos $D > 0$



- yksi (ns. kaksoisjuuri), jos $D = 0$



- nolla, jos $D < 0$.



Esimerkki 6 Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^2 - ax + a = 1$ on kaksoisjuuri?

Ratkaisu Toisen asteen yhtälöllä

$$x^2 - ax + a = 1 \quad \text{eli} \quad x^2 - ax + a - 1 = 0$$

on kaksoisjuuri eli yksi reaalijuuri, jos diskriminantti on nolla.

Saadaan yhtälö

$$(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 1) = 0 \qquad \big| \; D = b^2 - 4ac$$
$$a^2 - 4(a - 1) = 0$$
$$a^2 - 4a + 4 = 0$$
$$(a - 2)^2 = 0$$
$$a - 2 = 0$$
$$a = 2$$

Toisen asteen epäyhtälö ratkaistaan seuraavasti:
- Siirretään termit samalle puolelle.
- Lasketaan nollakohdat.
- Piirretään kuvaajaparaabeli, jonka perusteella saadaan vastaus.

Esimerkki 7 Ratkaise epäyhtälö. a) $x^2 \geq x$ b) $x - 1 > 2(x-1)^2$

Ratkaisu

a) $x^2 \geq x$

$x^2 - x \geq 0$

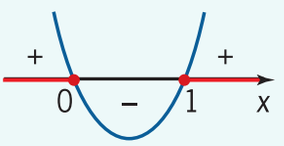
Nollakohdat:

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$

Kuvaaja:



Siis $x \leq 0$ tai $x \geq 1$.

b) $x - 1 > 2(x-1)^2$

$x - 1 > 2(x^2 - 2x + 1)$

$x - 1 > 2x^2 - 4x + 2$

$-2x^2 + 5x - 3 > 0$

Nollakohdat:

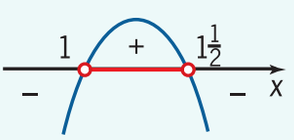
$-2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{-4}$$

$x = 1$ tai $x = 1\frac{1}{2}$

Kuvaaja:



Siis $1 < x < 1\frac{1}{2}$.

KORKEAMPI ASTE

- **Korkeamman asteen yhtälöä** ratkaistaessa voidaan yleensä soveltaa tekijöihin jakoa ja tulon nollasääntöä.
- Bikvadraattisessa yhtälössä voidaan käyttää sijoitusta $t = x^2$.

Esimerkki 8

a) $x^4 = 16x^2$

$x^4 - 16x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 16) = 0$ | tulon nollasääntö

$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 16 = 0$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 = 16$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm\sqrt{16}$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm 4$

b) $x^3 + x^2 = 3x + 3$

$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ | ryhmittely

$x^2(x + 1) - 3(x + 1) = 0$ | yhteinen tekijä

$(x + 1)(x^2 - 3) = 0$ | tulon nollasääntö

$x + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 3 = 0$

$x = -1 \quad \text{tai} \quad x^2 = 3$

$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = \pm\sqrt{3}$

Esimerkki 9

a) $(x^3)^3 = -10$

$x^9 = -10$ | pariton eksponentti

$x = \sqrt[9]{-10}$

$x = -\sqrt[9]{10} \ (\approx -1{,}29)$

b) $(x^2)^3 = 10$

$x^6 = 10$ | parillinen eksponentti

$x = \pm\sqrt[6]{10} \ (\approx \pm 1{,}47)$

Esimerkki 10

$$x^4 + 2x^2 - 15 = 0 \quad \big| \text{ Sijoitetaan } t = x^2.$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$t = 3 \quad \text{tai} \quad t = -5 \quad \big| \; t = x^2$$

$$x^2 = 3 \quad \text{tai} \quad \underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-5}_{< 0}$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad \text{ei ratkaisua}$$

Vastaus $x = \pm\sqrt{3}$

Esimerkki 11

Millä vakion a arvolla jakolasku $(x^3 + 2x^2 + ax) : (x - 3)$ päättyy tasan? Määritä saadulla vakion arvolla polynomin $x^3 + 2x^2 + ax$ kaikki nollakohdat. [K80, 3]

Ratkaisu

Olkoon $P(x) = x^3 + 2x^2 + ax$. Koska jakolasku $\dfrac{P(x)}{x-3}$ päättyy tasan, polynomi $P(x)$ on jaollinen $(x - 3)$:lla eli $(x - 3)$ on polynomin $P(x)$ tekijä. Tällöin $x = 3$ on polynomin $P(x)$ nollakohta.

Siis

$$P(3) = 0$$
$$3^3 + 2 \cdot 3^2 + a \cdot 3 = 0$$
$$3a + 45 = 0$$
$$a = -15$$

Nollakohdat:

$$P(x) = 0$$
$$x^3 + 2x^2 - 15x = 0$$
$$x(x^2 + 2x - 15) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm 8}{2}$$
$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -5$$

Nollakohdat ovat $x = -5$, $x = 0$ ja $x = 3$.

Esimerkki 12 Millä vakion a arvoilla $x = 0$ on yhtälön $x^3 - 2ax^2 + a^2x - ax = 0$ ainoa reaalijuuri?

Ratkaisu

$$x^3 - 2ax^2 + a^2x - ax = 0$$
$$x(x^2 - 2ax + a^2 - a) = 0 \quad \text{| tulon nollasääntö}$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$$

Alkuperäisen yhtälön ainoa juuri on $x = 0$ täsmälleen silloin, kun toisen asteen yhtälön $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$
(1) ainoa juuri on $x = 0$ tai
(2) yhtälöllä ei ole reaalijuuria.

(1) Yhtälön $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ juuri on $x = 0$, jos ja vain jos

$$0^2 - 2a \cdot 0 + a^2 - a = 0$$
$$a^2 - a = 0$$
$$a(a - 1) = 0$$
$$a = 0 \text{ tai } a = 1$$

Yhtälöllä $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ on yksi juuri, jos ja vain jos

$$D = 0$$
$$(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - a) = 0$$
$$4a^2 - 4a^2 + 4a = 0$$
$$4a = 0$$
$$a = 0$$

Siis yhtälön $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ ainoa juuri on $x = 0$, jos ja vain jos $a = 0$.

(2) Yhtälöllä $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ ei ole reaalijuuria, jos ja vain jos

$$D < 0$$
$$(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - a) < 0$$
$$4a^2 - 4a^2 + 4a < 0$$
$$4a < 0$$
$$a < 0$$

Yhdistämällä kohdat (1) ja (2) saadaan vastaukseksi $a \leq 0$.

Korkeamman asteen epäyhtälö ratkaistaan seuraavasti:

- Siirretään kaikki termit samalle puolelle.
- Esitetään polynomi tulomuodossa.
- Määritetään nollakohdat.
- Polynomin merkit saadaan esimerkiksi tulon merkkisäännön avulla

Esimerkki 13 Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 9 \le 2x^3 - 18x$.

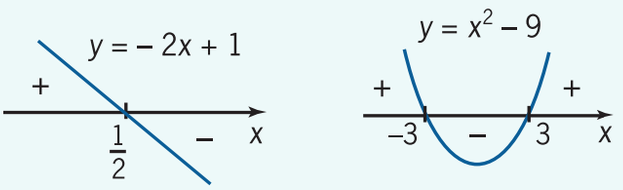
Ratkaisu

$$x^2 - 9 \le 2x^3 - 18x$$
$$x^2 - 9 - 2x^3 + 18x \le 0$$
$$-2x^3 + x^2 + 18x - 9 \le 0 \quad \text{| ryhmittely}$$
$$x^2(-2x + 1) - 9(-2x + 1) \le 0 \quad \text{| yhteinen tekijä}$$
$$(-2x + 1)(x^2 - 9) \le 0$$

Nollakohdat:

$$(-2x + 1)(x^2 - 9) = 0$$
$$-2x + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 9 = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \pm 3$$

Kuvaajat:



Merkkikaavio:

$-2x + 1$	+	+	−	−
$x^2 - 9$	+	−	−	+
tulo	+	−	+	−

$-3 \quad \frac{1}{2} \quad 3 \quad x$

Vastaus $-3 \le x \le \frac{1}{2}$ tai $x \ge 3$

2.2 Rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö

Rationaaliyhtälön ratkaiseminen

- Tutkitaan määrittelyjoukko.
- Kerrotaan nimittäjät pois.
- Ratkaistaan saatu polynomiyhtälö.

Esimerkki 1 Ratkaise yhtälö. a) $x - \frac{x^2+1}{x-2} = 3$ b) $10 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x-x^2}$

Ratkaisu

a) $x - \frac{x^2+1}{x-2} = 3 \quad \left| \begin{array}{l} x \neq 2 \\ \cdot (x-2)\ (\neq 0) \end{array} \right.$

$x(x-2) - (x^2+1) = 3(x-2)$

$x^2 - 2x - x^2 - 1 = 3x - 6$

$-2x - 1 = 3x - 6$

$-5x = -5$

$x = 1 \quad | \ x \neq 2$

kelpaa

b) $10 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x-x^2} \quad \left| \begin{array}{l} x \neq 0 \text{ ja } x - x^2 \neq 0 \\ x \neq 0 \text{ ja } x(1-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \text{ ja } x \neq 1 \end{array} \right.$

$10 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1-x)} \quad | \cdot x(1-x) \quad (\neq 0)$

$10x(1-x) + (1-x) = 1$

$10x - 10x^2 + 1 - x = 1$

$-10x^2 + 9x = 0$

$x(-10x + 9) = 0$

$x = 0$ tai $-10x + 9 = 0 \quad | \ x \neq 0 \text{ ja } x \neq 1$

ei kelpaa $\quad -10x = -9$

$x = \frac{9}{10} \quad | \ x \neq 0 \text{ ja } x \neq 1$

kelpaa

Vastaus a) $x = 1$ b) $x = \frac{9}{10}$

Rationaaliepäyhtälön ratkaiseminen

- Tutkitaan määrittelyjoukko.
- Siirretään kaikki termit samalle puolelle.
- Lavennetaan samannimisiksi ja yhdistetään lausekkeet.
- Määritetään osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.
- Tehdään merkkikaavio.

Esimerkki 2 Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} \le 1$.

Ratkaisu

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \le 1 \qquad \left| \begin{array}{l} x-1 \neq 0 \text{ ja } x+1 \neq 0 \\ x \neq 1 \text{ ja } x \neq -1 \end{array} \right.$$

$$\overset{x+1)}{\frac{1}{x-1}} - \overset{x-1)}{\frac{1}{x+1}} - \overset{x^2-1)}{1} \le 0$$

$$\frac{x+1-(x-1)-(x^2-1)}{x^2-1} \le 0$$

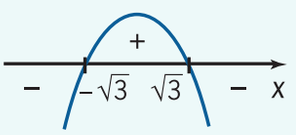
$$\frac{x+1-x+1-x^2+1}{x^2-1} \le 0$$

$$\frac{3-x^2}{x^2-1} \le 0$$

Osoittajan nollakohdat:

$$3 - x^2 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

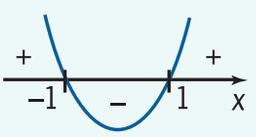
Osoittajan kuvaaja:



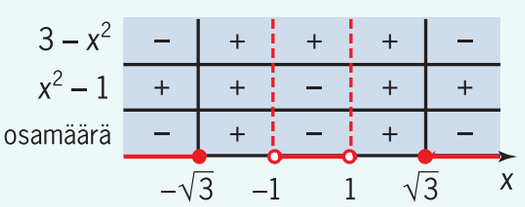
Nimittäjän nollakohdat:

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x = \pm 1$$

Nimittäjän kuvaaja:



Merkkikaavio:



Siis $x \le -\sqrt{3}$ tai $-1 < x < 1$ tai $x \ge \sqrt{3}$.

2.3 Itseisarvoyhtälö ja -epäyhtälö

Yhtälön $|a| = b$ ratkaiseminen

- Jos $b \geq 0$, niin $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ tai $a = -b$.
- Jos $b < 0$, niin yhtälöllä $|a| = b$ ei ole ratkaisua.

Yhtälön $|a| = |b|$ ratkaiseminen

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ tai $a = -b$
- $|a| = |b| \Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Esimerkki 1 Ratkaise yhtälö. a) $|2x - 1| = 4$ b) $|2x - 1| = 4x$

Ratkaisu

a) $|2x - 1| = \underbrace{4}_{\geq 0}$

Jos $b \geq 0$, niin $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ tai $a = -b$.

$$\begin{aligned} 2x - 1 = 4 \quad &\text{tai} \quad 2x - 1 = -4 \\ 2x = 5 \quad &\text{tai} \quad 2x = -3 \\ x = \frac{5}{2} \quad &\text{tai} \quad x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) $|2x - 1| = 4x$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1 Jos $2x - 1 \geq 0$ eli $x \geq \frac{1}{2}$, niin saadaan

$|\underbrace{2x - 1}_{\geq 0}| = 4x$ | $x \geq \frac{1}{2}$; Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 4x \\ -2x &= 1 \\ x &= -\frac{1}{2} \quad \left| \; x \geq \frac{1}{2} \right. \end{aligned}$$

ei kelpaa

2 Jos $2x - 1 < 0$ eli $x < \frac{1}{2}$, niin saadaan

$$|\underbrace{2x - 1}_{< 0}| = 4x \qquad \Big| \; x < \tfrac{1}{2}$$

Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$.

$$-(2x - 1) = 4x$$
$$-2x + 1 = 4x$$
$$-6x = -1$$
$$x = \frac{1}{6} \qquad \Big| \; x < \tfrac{1}{2}$$

kelpaa

Vastaus a) $x = \frac{5}{2}$ tai $x = -\frac{3}{2}$ b) $x = \frac{1}{6}$

Esimerkki 2 Ratkaise yhtälö $|2x^2 - 1| - |4x + 5| = 0$.

Ratkaisu

$$|2x^2 - 1| - |4x + 5| = 0$$
$$|2x^2 - 1| = |4x + 5| \qquad \Big| \; |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$$
$$2x^2 - 1 = \pm(4x + 5)$$

$2x^2 - 1 = 4x + 5$ tai $2x^2 - 1 = -4x - 5$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$ tai $2x^2 + 4x + 4 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ tai $x^2 + 2x + 2 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$ tai $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$

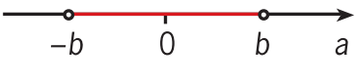
$x = \frac{2 \pm 4}{2}$ tai $x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$x = -1$ tai $x = 3$ tai ei reaalijuuria

Vastaus $x = -1$ tai $x = 3$

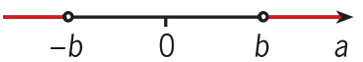
Epäyhtälön $|a| < b$ ratkaiseminen

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$



Epäyhtälön $|a| > b$ ratkaiseminen

$$|a| > b \Leftrightarrow a > b \text{ tai } a < -b$$



Neliöönkorotuslause

Ei-negatiivisten lukujen suuruusjärjestys säilyy korotettaessa neliöön.

Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin

- $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$
- $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

Epäyhtälön $|a| < |b|$ ratkaiseminen

$$|a| < |b| \Leftrightarrow |a|^2 < |b|^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

Esimerkki 3 Ratkaise epäyhtälö.

a) $5 - x \le |x + 5|$ b) $|1 - x| - |2x + 1| > 0$

Ratkaisu

a) $5 - x \le |x + 5|$

$|x + 5| \ge 5 - x$ | $|a| \ge b \Leftrightarrow a \ge b$ tai $a \le -b$

$x + 5 \ge 5 - x$ tai $x + 5 \le -(5 - x)$

$2x \ge 0$ tai $x + 5 \le -5 + x$

$x \ge 0$ tai $5 \le -5$ aina epätosi

ei ratkaisua

Siis $x \ge 0$.

b) $|1 - x| - |2x + 1| > 0$

$\underbrace{|1 - x|}_{\ge 0} > \underbrace{|2x + 1|}_{\ge 0}$ | Jos $a \ge 0$ ja $b \ge 0$, niin $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.

$|1 - x|^2 > |2x + 1|^2$ | $|a|^2 = a^2$

$(1 - x)^2 > (2x + 1)^2$

$1 - 2x + x^2 > 4x^2 + 4x + 1$

$-3x^2 - 6x > 0$

Nollakohdat:

$-3x^2 - 6x = 0$

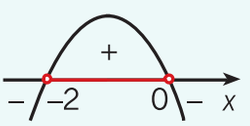
$x(-3x - 6) = 0$

$x = 0$ tai $-3x - 6 = 0$

$-3x = 6$

$x = -2$

Kuvaaja:



Siis $-2 < x < 0$.

Vastaus a) $x \ge 0$ b) $-2 < x < 0$

Esimerkki 4 Ratkaise epäyhtälö $3x^2 - 1 > 2|x|$.

Ratkaisu

$$3x^2 - 1 > 2|x|$$

$$2|x| < 3x^2 - 1$$

$$|2||x| < 3x^2 - 1 \qquad |a||b| = |ab|$$

$$|2x| < 3x^2 - 1 \qquad |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$-(3x^2 - 1) < 2x < 3x^2 - 1$$

$-3x^2 + 1 < 2x$ ja $2x < 3x^2 - 1$

$3x^2 + 2x - 1 > 0$ ja $3x^2 - 2x - 1 > 0$

Nollakohdat:

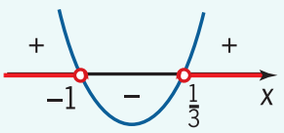
$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$x = \frac{1}{3}$ tai $x = -1$

Kuvaaja: $y = 3x^2 + 2x - 1$



1) $x < -1$ tai $x > \frac{1}{3}$

Nollakohdat:

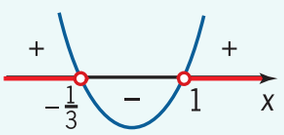
$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{6}$$

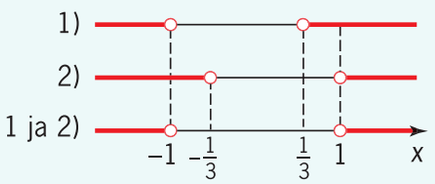
$x = 1$ tai $x = -\frac{1}{3}$

Kuvaaja: $y = 3x^2 - 2x - 1$



2) $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > 1$

Yhdistetään 1 ja 2.



Siis $x < -1$ tai $x > 1$.

2.4 Neliöjuuriyhtälö ja -epäyhtälö

Neliöjuuriyhtälön ja -epäyhtälön ratkaisemisessa voidaan käyttää neliöönkorotuslausetta.

Jos määrittelyehtoja ei tutkita, ratkaisut on lopuksi tarkistettava.

Esimerkki 1 Ratkaise yhtälö $x - \sqrt{43 - 3x} = 11$. [K91, 1a]

Ratkaisu

$$x - \sqrt{43 - 3x} = 11 \qquad \left| \; 43 - 3x \geq 0 \text{ eli } x \leq 14\tfrac{1}{3} \right.$$

$$\underbrace{\sqrt{43 - 3x}}_{\geq 0} = \underbrace{x - 11}_{\geq 0} \qquad \left| \; \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \text{ niin} \\ a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \\ \text{Siis oltava } x - 11 \geq 0 \\ \text{eli } x \geq 11. \end{array} \right.$$

$$43 - 3x = (x - 11)^2$$

$$43 - 3x = x^2 - 22x + 121$$

$$x^2 - 19x + 78 = 0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 78}}{2 \cdot 1} = \frac{19 \pm 7}{2}$$

$x = 13$ kelpaa tai $x = 6$ ei kelpaa $\qquad \left| \; x \leq 14\tfrac{1}{3} \text{ ja } x \geq 11 \right.$

Vastaus $x = 13$

Esimerkki 2 Ratkaise yhtälö $x + 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$.

Ratkaisu

$$x + 1 = \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \qquad \left| \; (\,)^2 \text{ Tarkistus!} \right.$$

$$(x + 1)^2 = \frac{1}{x + 1} \qquad \left| \; \cdot (x + 1) \right.$$

$$(x + 1)^3 = 1$$

$$x + 1 = \sqrt[3]{1}$$

$$x = 0$$

Tarkistus Kun $x = 0$, niin alkuperäisen yhtälön

vasen puoli on $0 + 1 = 1$ ja oikea puoli on $\dfrac{1}{\sqrt{0 + 1}} = 1$

Siis $x = 0$ on yhtälön ratkaisu.

Esimerkki 3 Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{x^2+2} > x+2$.

Ratkaisu

$\sqrt{x^2+2} > x+2$ | $x \in \mathbb{R}$, koska $x^2+2>0$ aina

1 Kun $x+2<0$ eli $x<-2$, niin epäyhtälö

$\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{>0} > \underbrace{x+2}_{<0}$ on aina tosi.

Siis epäyhtälö toteutuu arvoilla $x<-2$.

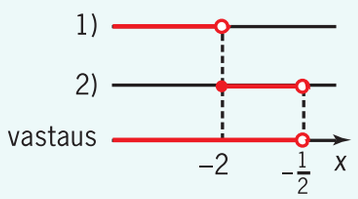
2 Kun $x+2 \geq 0$ eli $x \geq -2$, saadaan

$\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\geq 0} > \underbrace{x+2}_{\geq 0}$ | Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$.

$$\begin{aligned} x^2+2 &> (x+2)^2 \\ x^2+2 &> x^2+4x+4 \\ -4x &> 2 \\ x &< -\frac{1}{2} \end{aligned}$$ | $x \geq -2$

Siis epäyhtälö toteutuu arvoilla $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$.

Alkuperäisen epäyhtälön ratkaisu saadaan yhdistämällä kohtien 1 ja 2 ratkaisut.



Vastaus $x < -\frac{1}{2}$

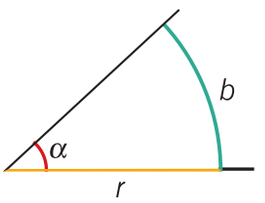
2.5 Trigonometriset yhtälöt

TRIGONOMETRIAN PERUSKÄSITTEITÄ

Määritelmä

Kulman suuruus **radiaaneina** on kaaren pituuden suhde säteen pituuteen.

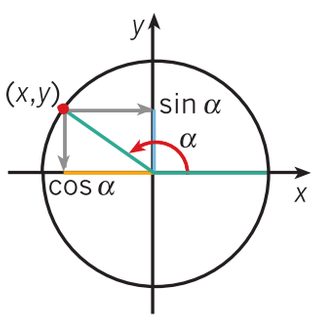
$$\alpha = \frac{b}{r}$$



Asteiden ja radiaanien vastaavuus

$$180° = \pi \text{ (rad)}$$

Sinin ja kosinin määritelmä



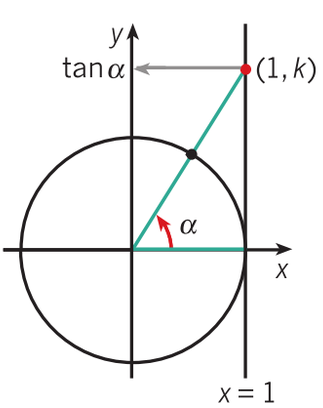
Suunnatun kulman α sini on kulman kehäpisteen y-koordinaatti, eli

$$\sin\alpha = y$$

Suunnatun kulman α kosini on kulman kehäpisteen x-koordinaatti, eli

$$\cos\alpha = x$$

Tangentin määritelmä $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}\right)$



- Kulman α tangentti on kulman tangenttipisteen y-koordinaatti, eli

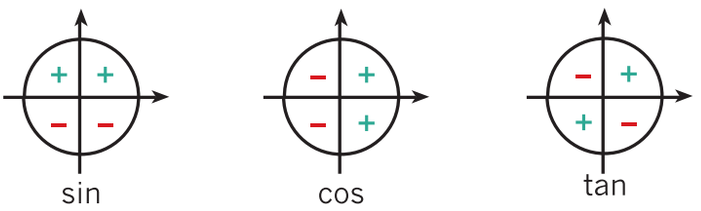
$$\tan\alpha = k$$

Tangentti voidaan määritellä myös toisella tavalla:

- Kulman α tangentti on kulman α sinin ja kosinin suhde, eli

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Sinin, kosinin ja tangentin merkki eri neljänneksissä:



Esimerkki 1 Olkoon $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\tan x = \sqrt{3}$. Laske $\cos x$.

Ratkaisu Tangentin määritelmän mukaan

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \Big| \cdot \cos x$$

$$\cos x \cdot \tan x = \sin x$$

$$\cos x = \frac{\sin x}{\tan x} \qquad \Big| \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ja } \tan x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

Sinin, kosinin ja tangentin ominaisuuksia

$\sin\alpha = \sin(\alpha + n \cdot 2\pi)$	sinin jaksollisuus
$\cos\alpha = \cos(\alpha + n \cdot 2\pi)$	kosinin jaksollisuus
$\tan\alpha = \tan(\alpha + n \cdot \pi)$	tangentin jaksollisuus
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	vastakulmien sinit
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	vastakulmien kosinit
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	vastakulmien tangentit
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$	komplementtikulmien sini ja kosini
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	komplementtikulmien sini ja kosini
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	suplementtikulmien sinit
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	suplementtikulmien kosinit

Esimerkki 2

a) **Sinin jaksollisuus**

$$\sin\frac{10\pi}{3}$$

Tarkkaa arvoa ei saada taulukkokirjasta eikä laskimesta.

$$= \sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right)$$

sinin jaksollisuus: $\sin\alpha = \sin(\alpha + n \cdot 2\pi)$

$$= \sin\left(3\frac{1}{3}\pi - 1 \cdot 2\pi\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$$

taulukkokirja

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) **Sinin etumerkin vaihtaminen**

$$-\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

vastakulmien sinit: $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$

$$= \sin\left[-\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

c) **Kosinin etumerkin vaihtaminen**

$$-\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

suplementtikulmien kosinit: $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$

$$= \cos\left[\pi - \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(\pi - 2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)$$

d) **Tangentin etumerkin vaihtaminen**

$$-\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

vastakulmien tangentit: $-\tan\alpha = \tan(-\alpha)$

$$= \tan\left[-\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \tan\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

e) **Sinin vaihtaminen kosiniksi**

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$$

komplementtikulmien sini ja kosini: $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$$

f) **Kosinin vaihtaminen siniksi**

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$$

komplementtikulmien sini ja kosini:
$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$= \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 3x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$$

Trigonometrian peruskaava

Kulman sinin ja kosinin neliöiden summa on yksi, eli

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Trigonometrian peruskaavalla voidaan aina laskea lausekkeen $\sin\alpha$ tarkka arvo, kun $\cos\alpha$ tunnetaan, ja päinvastoin.

Kaksinkertaisen kulman sini ja kosini

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha - 1\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

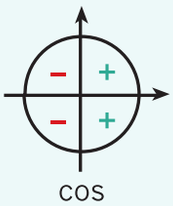
Esimerkki 3 Laske funktion $\sin 2x$ tarkka arvo, kun $\sin x = -\frac{8}{17}$ ja $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. [S94, 3]

Ratkaisu Trigonometrian peruskaavan mukaan

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \left|\ \sin x = -\frac{8}{17}\right.$$

$$\left(-\frac{8}{17}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{64}{289}$$



$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{225}{289}} \qquad \left| \begin{array}{l} \cos x < 0, \text{ koska} \\ \pi < x < \frac{3\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\cos x = -\frac{15}{17}$$

Kaksinkertaisen kulman sinin kaavan mukaan

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \left| \sin x = -\frac{8}{17}, \cos x = -\frac{15}{17} \right.$$

$$= 2\left(-\frac{8}{17}\right)\left(-\frac{15}{17}\right) = \frac{240}{289}$$

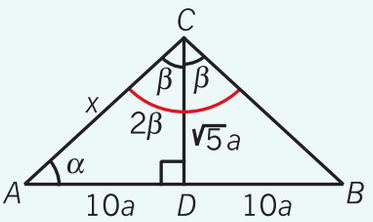
Esimerkki 4

Olkoon tasakylkisen kolmion kantakulma α ja huippukulma 2β. Laske huippukulman kosinin tarkka arvo ja likiarvo kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun kantakulman tangentti on $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Ratkaisu

Koska $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{10}$, niin tasakylkisen kolmion korkeus on $\sqrt{5}\,a$ ja kannan puolikas $10a$.

Piirretään mallikuva.



Kolmiosta ADC saadaan

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{5}a}{x}.$$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}a}{x}\right)^2 - 1$$

Määritetään x Pythagoraan lauseen avulla:

$$x^2 = (10a)^2 + (\sqrt{5}a)^2$$

$$x^2 = 105a^2$$

$$x = \pm\sqrt{105a^2} \qquad \left| \begin{array}{l} x > 0 \\ \sqrt{a^2} = |a| \end{array} \right.$$

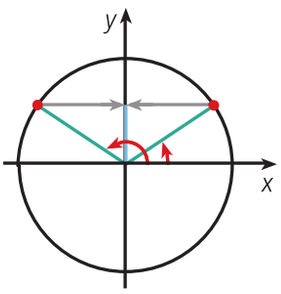
$$x = \sqrt{105}|a| \qquad | \; a > 0$$

$$x = \sqrt{105}a$$

Tällöin

$$\cos 2\beta = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{105}a}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{5}{105} - 1 = -\frac{19}{21} \approx -0{,}90$$

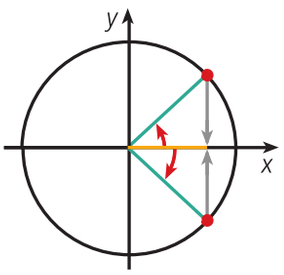
TRIGONOMETRISET YHTÄLÖT



Siniyhtälö

$$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow$$

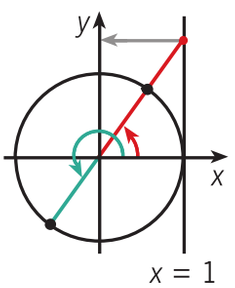
$$\alpha = \beta + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Kosiniyhtälö

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \beta + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = -\beta + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Tangenttiyhtälö

$$\tan\alpha = \tan\beta, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Leftrightarrow$$

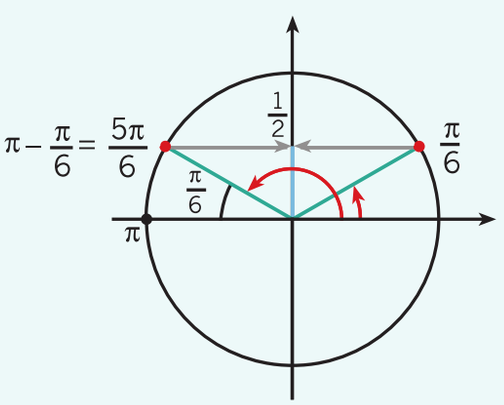
$$\alpha = \beta + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Esimerkki 5 Määritä x, kun $\sin 2x = \frac{1}{2}$ ja $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. [K83, 3a]

Ratkaisu

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

muistikolmiosta tai taulukkokirjasta: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



$$2x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$$

Tutkitaan, mitkä juurista ovat välillä $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

n	$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$	
0	$\frac{\pi}{12}$	ei kelpaa
1	$\frac{13\pi}{12}$	ei kelpaa
⋮		
-1	$-\frac{11\pi}{12}$	ei kelpaa
⋮	⋮	

n	$x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$	
0	$\frac{5\pi}{12}$	kelpaa
1	$\frac{17\pi}{12}$	ei kelpaa
⋮	⋮	
-1	$-\frac{7\pi}{12}$	ei kelpaa
⋮	⋮	

Vastaus $x = \frac{5\pi}{12}$

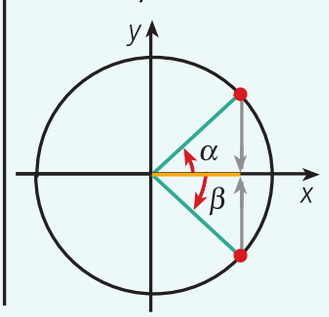
Esimerkki 6 Ratkaise yhtälö $\sin x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. [S92, 3b]

Ratkaisu

$$\sin x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \left| \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow$
$\alpha = \pm\beta + n \cdot 2\pi$



$$\frac{\pi}{2} - x = 2x + \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \text{ tai } \frac{\pi}{2} - x = -\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + n \cdot 2\pi$$

$$-3x = n \cdot 2\pi \qquad \text{tai } \frac{\pi}{2} - x = -2x - \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$x = n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad \text{tai } x = -\pi + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vastaus $x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x = -\pi + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki 7 Ratkaise yhtälö $\cos x + 2\sin^2 x = 1$.

Ratkaisu

$$\cos x + 2\sin^2 x = 1 \qquad \left| \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \right.$$

$$\cos x + 2(1 - \cos^2 x) = 1$$

$$\cos x + 2 - 2\cos^2 x = 1$$

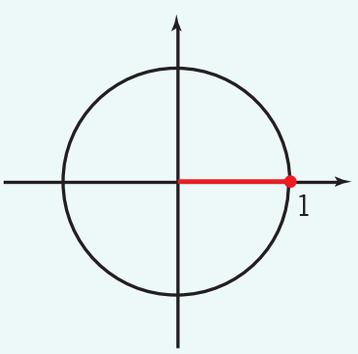
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \qquad \left| \text{Merkitään } u = \cos x. \right.$$

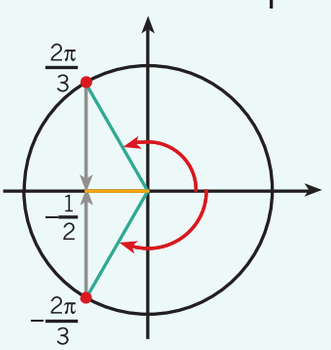
$$2u^2 - u - 1 = 0$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$u = 1 \quad \text{tai} \quad u = -\frac{1}{2} \qquad \left| u = \cos x \right.$$

$$\cos x = 1 \quad \text{tai} \quad \cos x = -\frac{1}{2} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{taulukkokirjasta:} \\ \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$





$$x = n \cdot 2\pi \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

Koska kulmien $x = n \cdot 2\pi$ ja $x = \pm\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ kehäpisteet sijaitsevat $\frac{2\pi}{3}$:n välein, kulmat voidaan esittää yhtenä lausekkeena $x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$.

Vastaus $x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki 8 Ratkaise yhtälö $\tan x + \tan 3x = 0$.

Ratkaisu

$$\tan x + \tan 3x = 0 \qquad \left| \; x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \text{ ja } 3x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \; x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3} \right.$$

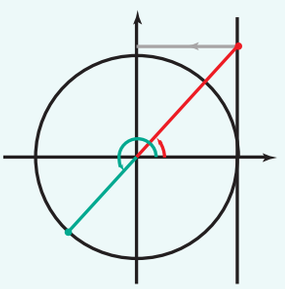
$$\tan x = -\tan 3x \qquad \left| \; -\tan\alpha = \tan(-\alpha) \right.$$

$$\tan x = \tan(-3x) \qquad \left| \; \tan\alpha = \tan\beta, \; \alpha = \beta + n \cdot \pi \right.$$

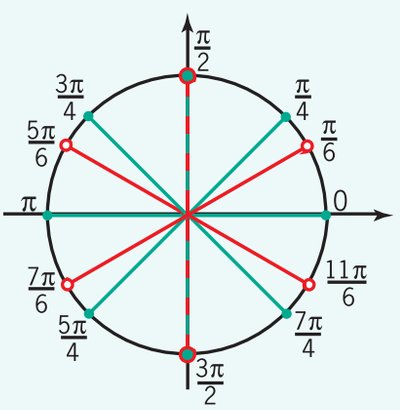
$$x = -3x + n \cdot \pi$$

$$4x = n \cdot \pi$$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{4}, \; n \in \mathbb{Z}$$



Tarkistetaan, mitkä kulmista $x = n \cdot \frac{\pi}{4}$ toteuttavat määrittelyehdon.



Havaitaan, että kulmat $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ eivät toteuta määrittelyehtoa.

Vastaus $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ tai $x = n \cdot \pi, \; n \in \mathbb{Z}$

2.6 Yhtälöryhmä

Yhtälöryhmän ratkaisuja ovat ne muuttujien arvot, jotka toteuttavat kaikki yhtälöryhmän yhtälöt. Ratkaisumenetelmänä käytetään usein sijoitus- tai yhteenlaskukeinoa.

Esimerkki 1

Torikauppias myy kukkakimppuja, joissa on 5 kpl kutakin kukkalajia. Kimppujen hinnat ovat seuraavat: ruusuja ja freesioita 35 €, liljoja ja freesioita 45 € sekä ruusuja, liljoja ja freesioita 65 €. Määritä kukkien kappalehinnat.

Ratkaisu

Merkitään kappalehintoja seuraavasti:

ruusu x (€)
freesia y (€)
lilja z (€)

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 5x + 5y = 35 \\ 5z + 5y = 45 \\ 5x + 5z + 5y = 65 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \vert : 5 \\ \vert : 5 \\ \vert : 5 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ z + y = 9 \\ x + z + y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & x = 7 - y \\ (2) & z + y = 9 \\ (3) & x + z + y = 13 \end{array} \quad \vert \text{ Sijoitetaan yhtälöihin (2) ja (3).}$$

$$\begin{cases} z + y = 9 \\ 7 - y + z + y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (4) & z + y = 9 \\ (5) & z = 6 \end{array} \quad \vert \text{ Sijoitetaan yhtälöön (4).}$$

$$\begin{aligned} 6 + y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned} \quad \vert \text{ Sijoitetaan yhtälöön (1).}$$

$$x = 7 - y = 7 - 3 = 4$$

Siis $x = 4$, $y = 3$ ja $z = 6$.

Vastaus

Ruusun hinta on 4 €, freesian 3 € ja liljan 6 €.

Esimerkki 2 Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y + 2z + 7 = 0 \\ 6x - 2y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$

Ratkaisu a) Sovelletaan yhteenlaskukeinoa.

$$\begin{array}{ll} (1)\\ (2) \end{array}\begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot\, 1 \\ \cdot\, (-4) \end{array}$$

$$+\begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ -20x + 28y = -4 \end{cases}$$

$$0 = 0 \quad \text{aina tosi}$$

Yhtälöt (1) ja (2) osoittautuivat yhtäpitäviksi, joten yhtälöparin ratkaisuja ovat kaikki lukuparit (x, y), joissa

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= 1 \\ -7y &= -5x + 1 \\ y &= \frac{5}{7}x - \frac{1}{7}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) $\begin{cases} 3x - y + 2z + 7 = 0 \\ 6x - 2y + 4z - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot\, (-2) \\ \cdot\, 1 \end{array}$

$$+\begin{cases} -6x + 2y - 4z - 14 = 0 \\ 6x - 2y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$-19 = 0 \quad \text{aina epätosi}$$

Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

Vastaus a) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{5}{7}x - \frac{1}{7} \end{cases}$ eli $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{7}t - \frac{1}{7} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

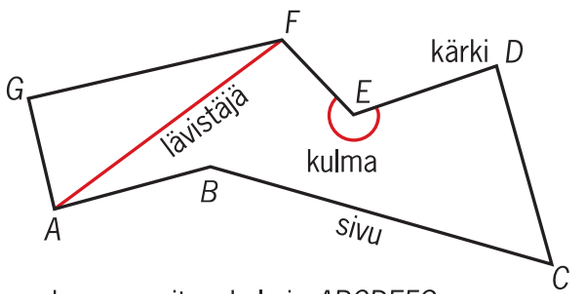
b) ei ratkaisua

3 Geometria

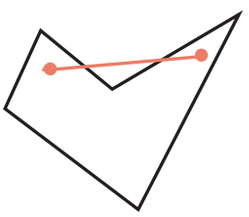
3.1 Tasogeometria

MONIKULMIO

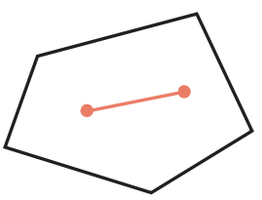
- Monikulmio on tasokuvio, jota rajoittaa suljettu, itseään leikkaamaton murtoviiva.



kovera seitsenkulmio *ABCDEFG*



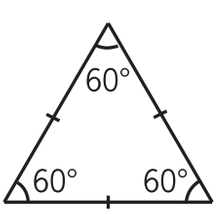
kovera monikulmio



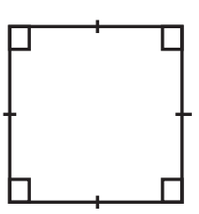
kupera monikulmio

- Jos monikulmiossa on n kulmaa, kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$ ja lävistäjien lukumäärä on $\frac{n(n-3)}{2}$.

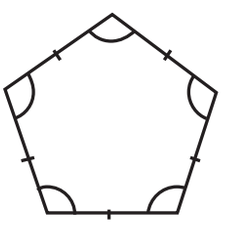
- Monikulmio on **säännöllinen**, kun sen kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat yhtä suuret. Säännöllisellä monikulmiolla on keskipiste, joka on monikulmion ympäri ja sisään piirrettyjen ympyröiden keskipiste.



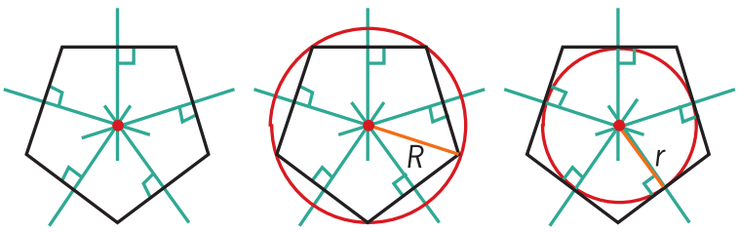
tasasivuinen kolmio



neliö



säännöllinen viisikulmio



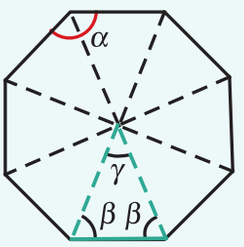
Olkoon säännöllisessä monikulmiossa n ($n \geq 3$) kulmaa.

Tällöin

- kulmien summa on $(n-2) \cdot 180°$
- yksi kulma on $\dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.

Esimerkki 1 Laske säännöllisen 8-kulmion kulman suuruus.

Tapa 1 Säännöllisen 8-kulmio voidaan jakaa kahdeksaksi samanlaiseksi tasakylkiseksi kolmioksi.



Huippukulma on $\gamma = \dfrac{360°}{8} = 45°$.

Kantakulma β saadaan yhtälöstä

$$2\beta + \gamma = 180°$$

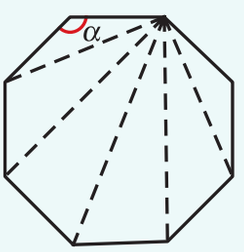
$$\beta = \frac{180° - \gamma}{2} \qquad \Big| \ \gamma = 45°$$

$$\beta = 67{,}5°$$

Koska $\alpha = 2\beta$, niin $\alpha = 135°$.

Tapa 2 Säännöllinen 8-kulmio voidaan jakaa kuudeksi kolmioksi.

Saadaan yhtälö



$$8\alpha = 6 \cdot 180°$$

$$\alpha = \frac{6 \cdot 180°}{8}$$

$$\alpha = 135°$$

Tapa 3 Säännöllisen 8-kulmion kulma on

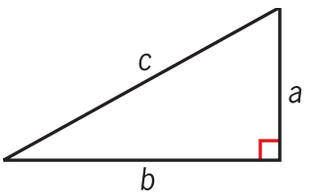
$$\frac{(8-2) \cdot 180°}{8} \qquad \Big| \ \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

$$= 135°$$

Vastaus Kulma on 135°.

Pythagoraan lause

Suorakulmaisen kolmion kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö.



$a^2 + b^2 = c^2$

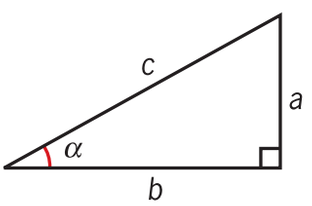
Määritelmä

Suorakulmaisessa kolmiossa

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

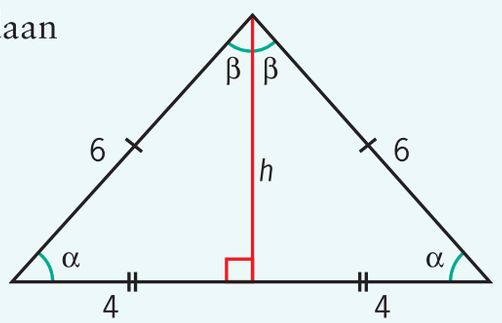
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$



Esimerkki 2 Kolmion sivujen pituudet ovat 6, 6 ja 8. Määritä kolmion pienimmän kulman sini ja suurimman kulman puolikkaan kosini. [K98, 2]

Ratkaisu Pythagoraan lauseella saadaan

$$h^2 + 4^2 = 6^2$$
$$h^2 = 20$$
$$h = (\pm)\sqrt{20}$$
$$h = 2\sqrt{5}$$



Kolmion lyhin sivu on 6, joten sen vastainen kulma α on pienin. Vastaavin perustein huippukulma 2β on suurin.

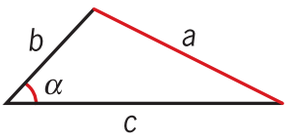
$$\sin\alpha = \frac{h}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{h}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Vastaus Pienimmän kulman sini on $\frac{\sqrt{5}}{3}$, ja suurimman kulman puolikkaan kosini on $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

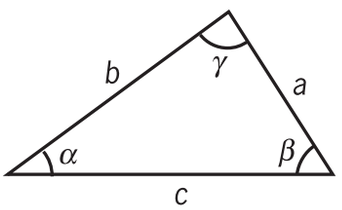
Kosinilause

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



Kosinilauseen avulla voidaan ratkaista

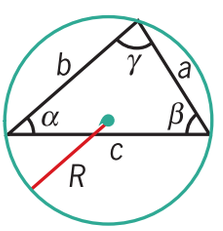
- kolmion kulmat, jos tunnetaan kaikki kolmion sivut
- kolmion kolmas sivu, jos tunnetaan kolmion kaksi sivua ja yksi kulma.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Sinilause

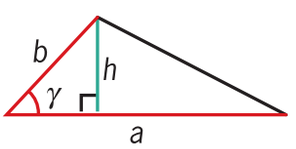
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Sinilauseen mukaan kolmion sivun ja vastaisen kulman sinin suhde on aina sama. Jos sinilauseen avulla lasketaan kolmion kulman suuruutta, niin on muistettava ottaa huomioon myös suplementtikulma. Katso esimerkkiä 4.

Kolmion pinta-ala

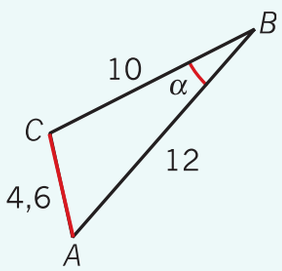
$$A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma$$



Kolmion pinta-ala voidaan laskea kahden sivun ja niiden välisen kulman sinin avulla.

Esimerkki 3 Kuinka suuressa kulmassa jana AC näkyy pisteestä B, kun $AC = 4{,}6$, $AB = 12$ ja $CB = 10$?

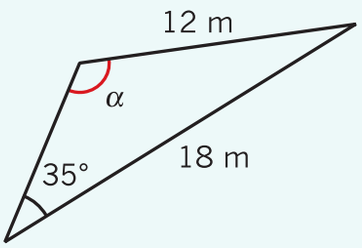
Ratkaisu Kosinilauseen mukaan



$$4{,}6^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos\alpha$$
$$21{,}16 = 100 + 144 - 240\cos\alpha$$
$$240\cos\alpha = 222{,}84$$
$$\cos\alpha = \frac{222{,}84}{240} \qquad \left| \text{ laskin: } \cos^{-1} \right.$$
$$\alpha = 21{,}7978\ldots°$$
$$\alpha \approx 22°$$

Esimerkki 4 Tylppäkulmaisen kolmion 35°:n kulman vastaisen sivun pituus on 12 m ja viereisen sivun pituus 18 m. Laske 18 m pitkän sivun vastainen kulma.

Ratkaisu Sinilauseen mukaan



$$\frac{18\text{ m}}{\sin\alpha} = \frac{12\text{ m}}{\sin 35°}$$
$$12\text{ m} \cdot \sin\alpha = 18\text{ m} \cdot \sin 35°$$
$$\sin\alpha = \frac{18\text{m} \cdot \sin 35°}{12\text{ m}}$$
$$\alpha = 59{,}357\ldots° \quad \text{tai} \quad \alpha = 180° - 59{,}357\ldots°$$
$$\alpha \approx 59° \quad \text{tai} \quad \alpha \approx 121° \quad (> 90°)$$
$$\text{kelpaa}$$

Tutkitaan, onko kolmio tylppäkulmainen, jos $\alpha \approx 59°$.

Kolmion kolmas kulma on noin

$$180° - 35° - 59° = 86° \ (< 90°)$$

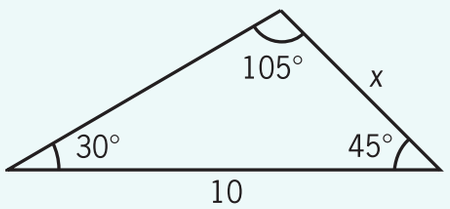
Siis kolmio on teräväkulmainen, kun $\alpha \approx 59°$, joten $\alpha \approx 59°$ ei kelpaa.

Vastaus 121°

Esimerkki 5 Kolmiossa on 30°:n ja 105°:n kulmat, ja suurinta kulmaa vastaava sivu on 10. Laske kolmion alan tarkka arvo ja yksidesimaalinen likiarvo.

Ratkaisu Kolmion kolmas kulma on $180° - (30° + 105°) = 45°$.

Koska kolmion suurin kulma on 105°, niin sen vastainen sivu on pisin. Piirretään mallikuva.



Sinilauseella saadaan

$$\frac{x}{\sin 30°} = \frac{10}{\sin 105°}$$

$$x \cdot \sin 105° = 10 \cdot \sin 30° \qquad \left| \sin 30° = \frac{1}{2} \right.$$

$$x = \frac{5}{\sin 105°}$$

Kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma$, joten

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x \sin 45° \qquad \left| x = \frac{5}{\sin 105°} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{5}{\sin 105°} \cdot \sin 45° \qquad \left| \text{taulukkokirja} \right.$$

$$= 5 \cdot \frac{5}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{25}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{12}+2}$$

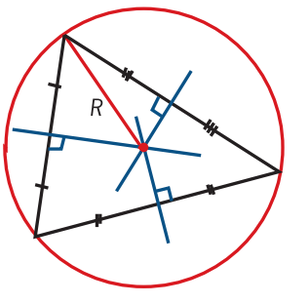
$$= \frac{100}{2\sqrt{3}+2} = \frac{100}{2(\sqrt{3}+1)} = \overset{(\sqrt{3}-1)}{} \frac{50}{\sqrt{3}+1} = \frac{50(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{50(\sqrt{3}-1)}{2} = 25(\sqrt{3}-1) \approx 18{,}3$$

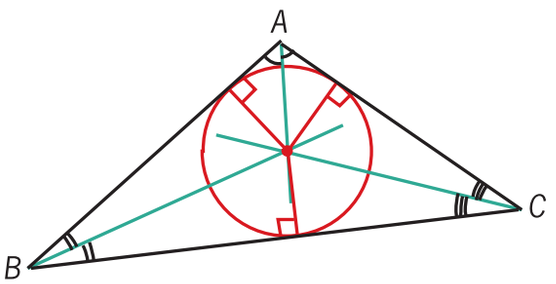
Vastaus Kolmion ala on $25(\sqrt{3}-1) \approx 18{,}3$.

KOLMION MERKILLISET PISTEET

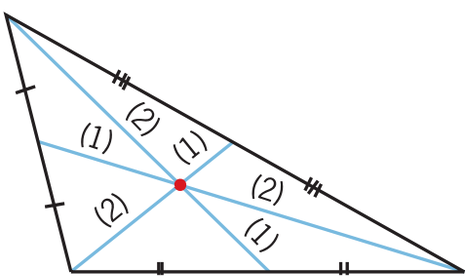
- Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa pisteessä, joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.



- Kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

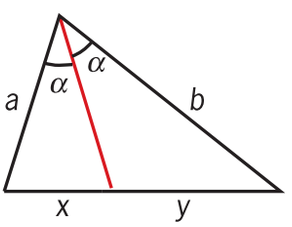


- Mediaanien leikkauspiste (kolmion **painopiste**) jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2:1 kärjestä lukien.



Kulmanpuolittajalause

Kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.



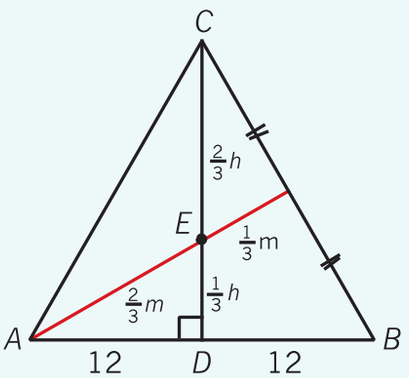
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Esimerkki 6 Laske tasakylkisen kolmion ala, kun kanta on 24 ja kyljen vastainen mediaani 19,5.

Ratkaisu Olkoon kyljen vastainen mediaani $m = 19{,}5$.

Tasakylkisessä kolmiossa huipusta piirretty korkeusjana h on samalla myös mediaani. Tällöin h ja m jakavat toisensa suhteessa 2:1.

Piirretään mallikuva.



Kolmion ADE hypotenuusa on $\frac{2}{3}m = \frac{2}{3} \cdot 19{,}5 = 13$.

Pythagoraan kaavan mukaan

$$\left(\frac{1}{3}h\right)^2 + 12^2 = 13^2 \qquad \big| \ \Delta\, ADE$$

$$\frac{1}{9}h^2 = 25$$

$$h^2 = 225$$

$$h = \pm\sqrt{225} \qquad \big| \ h > 0$$

$$h = 15$$

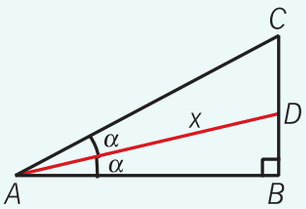
Kolmion ala on $A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{24 \cdot 15}{2} = 180$.

Vastaus 180

Esimerkki 7

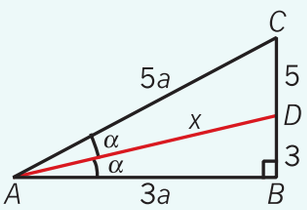
Suorakulmaisen kolmion ABC terävän kulman A puolittaja jakaa kateetin BC osiin, joiden pituudet ovat 5 ja 3. Määritä kulman A puolittajan pituus.

Ratkaisu



Kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, joten $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Koska $AB < AC$, niin $BD < DC$, joten $BD = 3$ ja $DC = 5$. Siis $\frac{3}{5} = \frac{AB}{AC}$.



Merkitään $AB = 3a$, jolloin $AC = 5a$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$(5a)^2 = (3a)^2 + 8^2 \qquad \mid \Delta\, ABC$$

$$16a^2 = 64$$

$$a^2 = 4$$

$$a = (\pm)2 \qquad \mid a > 0$$

Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 = (3a)^2 + 3^2 \qquad \mid \begin{matrix} \Delta\, ABD \\ a = 2 \end{matrix}$$

$$x^2 = 45$$

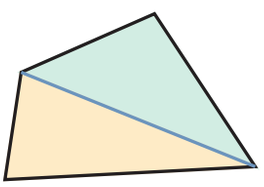
$$x = (\pm)\sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$$

Vastaus

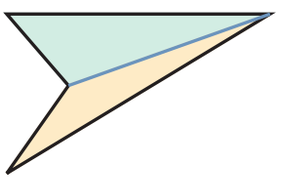
$3\sqrt{5} \approx 6{,}7$

NELIKULMIO

Nelikulmio voidaan aina jakaa kahdeksi kolmioksi riippumatta siitä, onko nelikulmio kupera vai kovera. Nelikulmion kulmien summa on siis $2 \cdot 180° = 360°$.



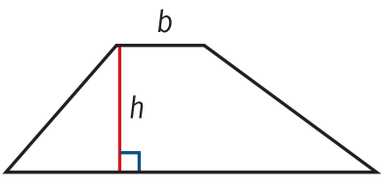
kupera nelikulmio



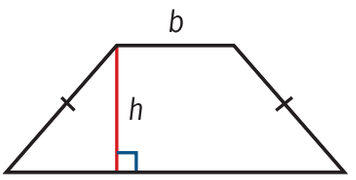
kovera nelikulmio

Määritelmä

Puolisuunnikas on nelikulmio, jossa on kaksi yhdensuuntaista sivua eli kantaa.



puolisuunnikas



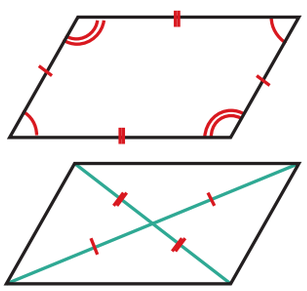
tasakylkinen puolisuunnikas

Puolisuunnikkaan ala

$$A = \frac{a+b}{2}\,h$$

Määritelmä

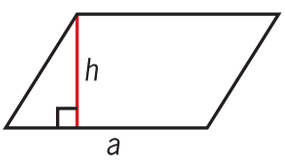
Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.



Lause

Nelikulmio on suunnikas, jos ja vain jos

- vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret tai
- vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät tai
- lävistäjät puolittavat toisensa.



$A = ah$

Suunnikkaan ala

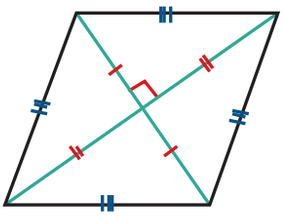
$$A = ah$$

Määritelmiä

Neljäkäs eli **vinoneliö** on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

Suorakulmio on suunnikas, jonka kaikki kulmat ovat suoria.

Neliö on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat suoria.



Lause

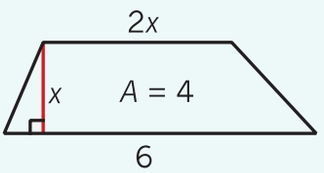
Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa ja ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Esimerkki 8

Puolisuunnikkaan korkeus on puolet lyhyemmästä kannasta. Laske puolisuunnikkaan lyhyempi kanta, kun pidempi kanta on 6 ja ala on 4.

Ratkaisu

Piirretään mallikuva.



Saadaan yhtälö

$$\frac{2x+6}{2} \cdot x = 4$$

$$(x+3) \cdot x = 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$x = 1$ tai $x = -4$ $\quad | \; x > 0$

kelpaa ei kelpaa

Lyhyempi kanta on siis $2x = 2 \cdot 1 = 2$.

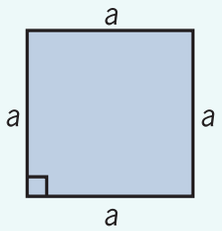
Vastaus

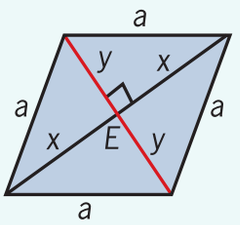
Lyhyempi kanta on 2.

Esimerkki 9 Neljäkkään ala on 60 % sellaisen neliön alasta, jonka sivu on neljäkkään sivun pituinen. Laske neljäkkään lyhyemmän ja pidemmän lävistäjän suhde.

Ratkaisu Olkoon neliön ja neljäkkään sivun pituus a sekä neljäkkään pidempi lävistäjä $2x$ ja lyhyempi $2y$.

Piirretään mallikuva.





Koska $A_{\text{neliö}} = a^2$, niin $A_{\text{neljäkäs}} = 0{,}6a^2$.

Toisaalta neljäkkään ala on $A_{\text{neljäkäs}} = 4 \cdot \frac{xy}{2} = 2xy$.

Saadaan yhtälö $2xy = 0{,}6\,a^2$.

Pythagoraan lauseen mukaan $a^2 = x^2 + y^2$.

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} (1) \quad a^2 = x^2 + y^2 \\ (2) \quad 2xy = 0{,}6a^2 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön (2).}$$

$$2xy = 0{,}6(x^2 + y^2)$$

$$2xy = 0{,}6x^2 + 0{,}6y^2$$

$$0{,}6y^2 - 2xy + 0{,}6x^2 = 0 \quad \Big| \cdot 10$$

$$6y^2 - 20xy + 6x^2 = 0 \quad \Big| : 2$$

$$3y^2 - 10xy + 3x^2 = 0$$

$$y = \frac{10x \pm \sqrt{(10x)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3x^2}}{2 \cdot 3} = \frac{10x \pm 8x}{6}$$

$$y = 3x \quad \text{tai} \quad y = \frac{1}{3}x \quad \Big| \, y < x$$

ei kelpaa kelpaa

Tällöin $\frac{2y}{2x} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{3}x}{x} = \frac{1}{3}$.

Vastaus Lävistäjien suhde on 1:3.

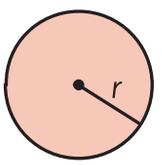
YMPYRÄ

Ympyrän piiri

$$p = \pi d$$
$$p = 2\pi r$$

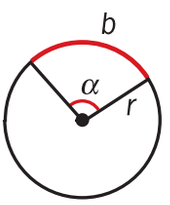
Ympyrän pinta-ala

$$A = \pi r^2$$



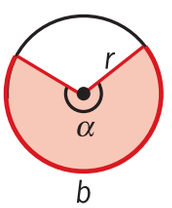
Kaaren pituus

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

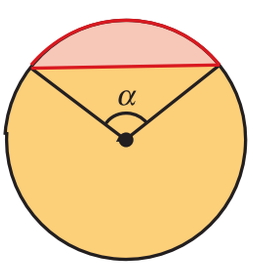


Sektorin ala

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$
$$A_{\text{sektori}} = \frac{br}{2}$$



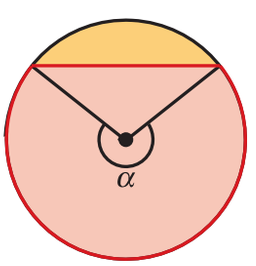
Segmentin ala



$\alpha < 180°$

$A_{\text{pieni segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}$

$A_{\text{pieni segmentti}} = A_{\text{ympyrä}} - A_{\text{iso segmentti}}$



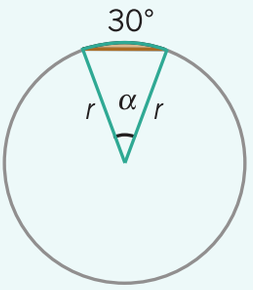
$\alpha > 180°$

$A_{\text{iso segmentti}} = A_{\text{sektori}} + A_{\text{kolmio}}$

$A_{\text{iso segmentti}} = A_{\text{ympyrä}} - A_{\text{pieni segmentti}}$

Esimerkki 10 Ympyrän kaaren asteluku on 30°. Laske kaarta vastaavan segmentin ja sektorin alojen suhde.

Ratkaisu Piirretään mallikuva.



$$A_{\text{sektori}} = \frac{30°}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{12}$$

$$A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{keskuskolmio}}$$

$$= \frac{\pi r^2}{12} - \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 30°$$

$$= \frac{\pi r^2}{12} - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi r^2}{12} - {}^{3)}\frac{r^2}{4} = \frac{\pi r^2 - 3r^2}{12} = \frac{(\pi - 3)r^2}{12}$$

Suhde on

$$\frac{A_{\text{segmentti}}}{A_{\text{sektori}}} = \frac{(\pi - 3)r^2}{12} : \frac{\pi r^2}{12}$$

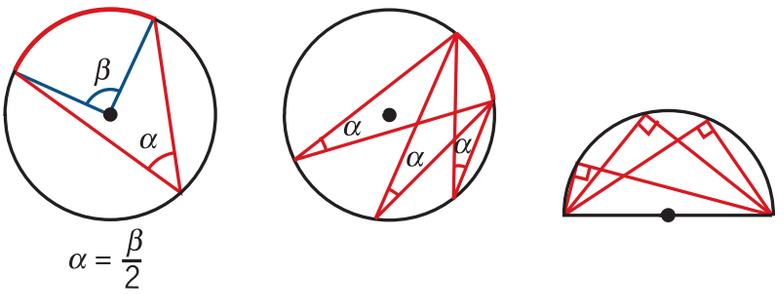
$$= \frac{(\pi - 3)r^2}{12} \cdot \frac{12}{\pi r^2}$$

$$= \frac{\pi - 3}{\pi} \approx 0{,}045$$

Vastaus $\dfrac{\pi - 3}{\pi}$

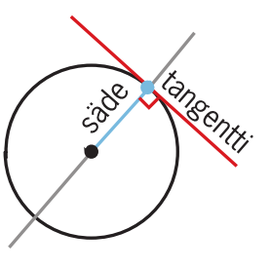
Lauseita

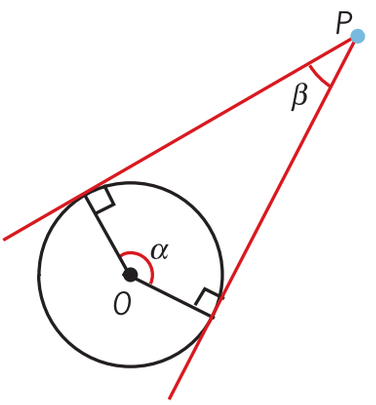
- Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.
- Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.
- Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.



$\alpha = \frac{\beta}{2}$

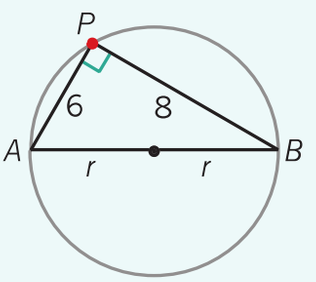
- Tangentin ja ympyrän sivuamispisteeseen piirretty säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan.
- Tangenttikulma ja sitä vastaava keskuskulma ovat toistensa suplementtikulmia, eli $\alpha + \beta = 180°$.





Esimerkki 11 Ympyrän kehällä olevan pisteen etäisyydet ympyrän halkaisijan päätepisteistä ovat 6 ja 8. Laske ympyrän säde.

Ratkaisu Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, joten $\sphericalangle APB = 90°$.



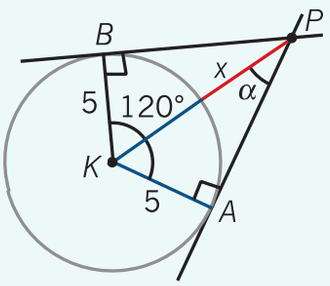
Pythagoraan lauseen mukaan

$$(2r)^2 = 6^2 + 8^2$$
$$4r^2 = 36 + 64$$
$$4r^2 = 100$$
$$r^2 = 25$$
$$r = (\pm)\, 5 \qquad | \; r > 0$$

Vastaus Ympyrän säde on 5.

Esimerkki 12 Ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä P piirretään ympyrälle tangentit. Laske pisteen P etäisyys ympyrän kehästä, kun ympyrän säde on 5 ja keskuskulma on 120°.

Ratkaisu Piirretään mallikuva.



Tangenttikulma on $\sphericalangle APB = 180° - 120° = 60°$, joten

$$\alpha = \frac{60°}{2} = 30°.$$

Kolmiosta KAP saadaan yhtälö

$$\sin 30° = \frac{5}{5 + x}$$

taulukkokirjasta tai muistikolmiosta:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{5 + x}$$

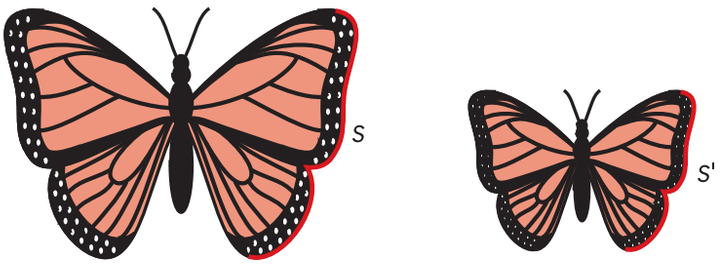
$$5 + x = 10$$

$$x = 5$$

Vastaus Etäisyys on 5.

YHDENMUOTOISUUS

Yhdenmuotoisuuden merkintä on ~.



$K \sim K'$

Määritelmä

Mittakaava k on vastinosien pituuksien suhde eli $k = \frac{s'}{s}$.

Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinosat ovat verrannolliset, joten on voimassa

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

verrannossa vastinosien pituuksien suhde eri kuvioista

ja

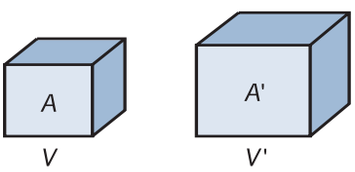
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

verrannossa vastinosien pituuksien suhde samasta kuviosta

Lause

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A'}{A} = k^2$$



Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V'}{V} = k^3$$

Esimerkki 13 Yhdenmuotoisten arkkien A4 ja A5 alojen suhde on 100: 50. Kirjoitusta sisältävä A4-kokoinen arkki pienennetään kokoon A5. Kuinka monta prosenttia tekstin korkeus tällöin pienenee? [K92, 4a]

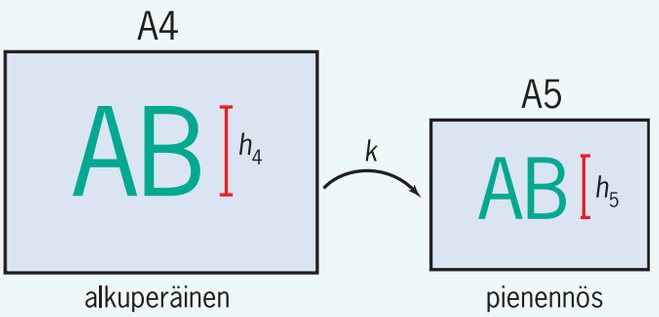
Ratkaisu Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten

$$k^2 = \frac{A_5}{A_4}$$

$$k^2 = \frac{50}{100}$$

$$k^2 = \frac{1}{2}$$

$$k = (\pm)\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$



Vastintekstien korkeuksien suhde on mittakaava, joten

$$\frac{h_5}{h_4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h_4 = \sqrt{2}\,h_5 \quad (\approx 1{,}4\,h_5)$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia h_5 on pienempi kuin h_4.

$$\frac{h_4 - h_5}{h_4} \cdot 100\ \% = \frac{\sqrt{2}h_5 - h_5}{\sqrt{2}h_5} \cdot 100\,\%$$

$$= \frac{h_5(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}h_5} \cdot 100\ \%$$

$$= \overset{\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} \cdot 100\ \%$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot 100\ \%$$

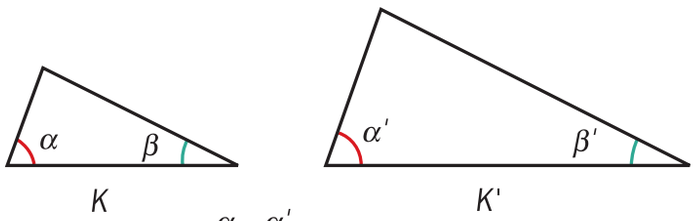
$$= 50(2 - \sqrt{2})\ \%$$

$$= 29{,}289\ldots\ \% \approx 29{,}3\ \%$$

Vastaus Tekstin korkeus pienenee $50(2 - \sqrt{2})\ \% \approx 29{,}3\ \%$.

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslause (kk)

Jos kolmiossa K on kaksi yhtä suurta kulmaa kuin kolmiossa K', niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.



$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$
$K \sim K'$ (kk)

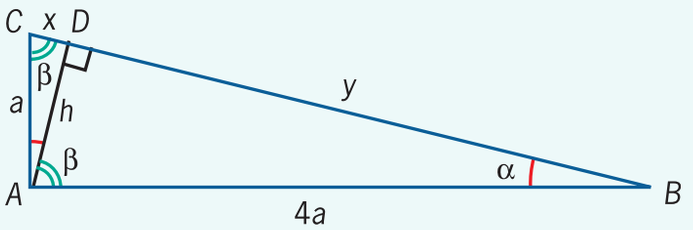
Esimerkki 14

Suorakulmaisen kolmion kateettien suhde on 1:4. Missä suhteessa hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan?

Ratkaisu

Kateettien suhde on 1:4, joten kateetit ovat a ja $4a$.

Piirretään mallikuva.



$\Delta CAD \sim \Delta ABD$ (kk), sillä

1. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB$ $(= 90°)$
2. $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABD$ $(= 90° - \beta)$

Mittakaava on $k = \dfrac{CA}{AB} = \dfrac{a}{4a} = \dfrac{1}{4}$.

Saadaan yhtälöpari $\begin{cases} \dfrac{x}{h} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{h}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ eli $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}h \\ y = 4\,h. \end{cases}$

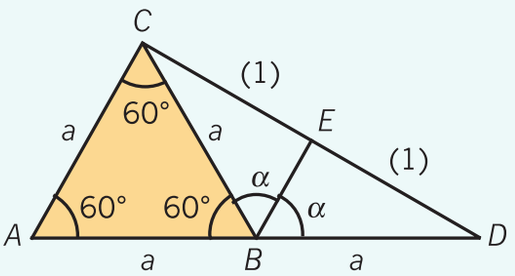
Tällöin $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\frac{1}{4}h}{4h} = \dfrac{\frac{1}{4}}{4} = \dfrac{1}{16}$.

Vastaus

Suhteessa 1:16

Esimerkki 15 Tasasivuisen kolmion ABC sivua AB jatketaan omalla pituudellaan pisteen B yli pisteeseen D. Olkoon E janan DC keskipiste. Laske kolmion ABC ala, kun kolmion BDE ala on 3.

Ratkaisu Piirretään mallikuva ja merkitään tasasivuisen kolmion ABC sivuja kirjaimella a.



$A_{BDE} = 3$

$\Delta ADC \sim \Delta BDE$ (kk), sillä

1. $\sphericalangle D$ on yhteinen
2. $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EBD$ $(= 60°)$

$\sphericalangle CBD = 2\alpha = 180° - 60° = 120°$
$\sphericalangle EBD = \alpha = 60°$

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivut ovat verrannolliset, joten mittakaava on $k = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{2a}{a} = 2$.

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten

$$\frac{A_{ADC}}{A_{BDE}} = k^2 \qquad \begin{vmatrix} k = 2 \\ A_{BDE} = 3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{A_{ADC}}{3} = 4$$

$$A_{ADC} = 4 \cdot 3$$

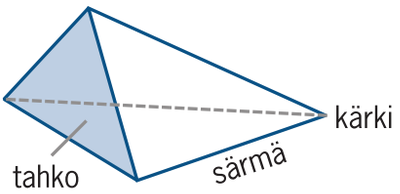
$$A_{ADC} = 12$$

Tällöin kolmion ABC ala on

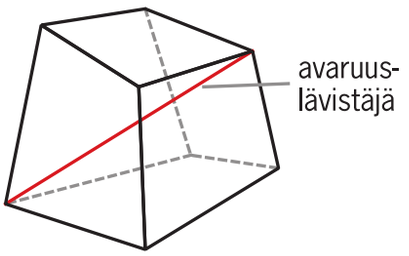
$$\begin{aligned} A &= A_{ADC} - A_{BDE} - A_{BEC} \qquad \left| A_{BDE} = A_{BEC} = 3 \right. \\ &= 12 - 3 - 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Vastaus Kolmion ABC ala on 6.

3.2 Avaruusgeometria



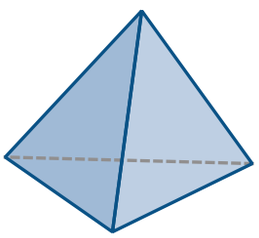
nelitahokas eli tetraedri



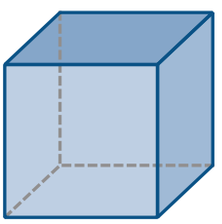
kuusitahokas eli heksaedri

Säännöllisen monitahokkaan tahkot ovat yhteneviä, säännöllisiä monikulmioita ja sen jokaisessa kärjessä kohtaa yhtä monta tahkoa. Säännöllisiä kuperia monitahokkaita on vain viittä eri muotoa ja ne tunnetaan nimellä **Platonin kappaleet.** (*Platon*, 427–347 eKr.)

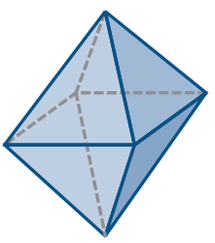
tetra	4
heksa	6
okta	8
dodeka	12
ikosa	20



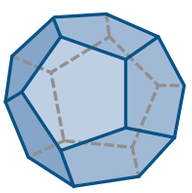
säännöllinen tetraedri



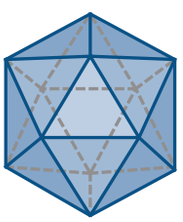
säännöllinen heksaedri
eli kuutio



säännöllinen oktaedri



säännöllinen
dodekaedri



säännöllinen
ikosaedri

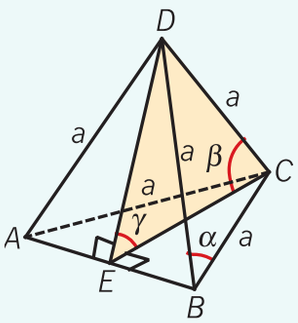
Huomautus Säännöllisten kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien kaavat ovat taulukkokirjassa.

Esimerkki 1

Laske säännöllisen tetraedrin
a) sivusärmän ja pohjasärmän välinen kulma
b) sivusärmän ja pohjan välinen kulma
c) sivutahkon ja pohjan välinen kulma.

Ratkaisu

Olkoon tetraedrin särmä a.



a) Sivusärmän ja pohjasärmän välinen kulma $\alpha = 60°$, koska kolmion BCD on tasasivuinen.

b) Kolmion ABC korkeusjana on $EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (taulukkokirjasta tai Pythagoraan lauseella).

Kolmion ABD korkeusjana on $ED = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (taulukkokirjasta tai Pythagoraan lauseella).

Sivusärmän ja pohjan välinen kulma β saadaan kosinilauseella kolmiosta ECD.

$$ED^2 = EC^2 + CD^2 - 2 \cdot EC \cdot CD \cdot \cos\beta$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos\beta$$

$$a^2\sqrt{3}\cos\beta = a^2$$

$$\sqrt{3}\cos\beta = 1$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = 54{,}735\ldots°$$

$$\beta \approx 54{,}7°$$

c) Koska $EC = ED$, niin kolmio ECD on tasakylkinen. Tällöin sivutahkon ja pohjan välinen kulma γ on tasakylkisen kolmion ECD huippukulma, joten

$$\gamma = 180° - 2\beta = 70{,}528\ldots° \approx 70{,}5°$$

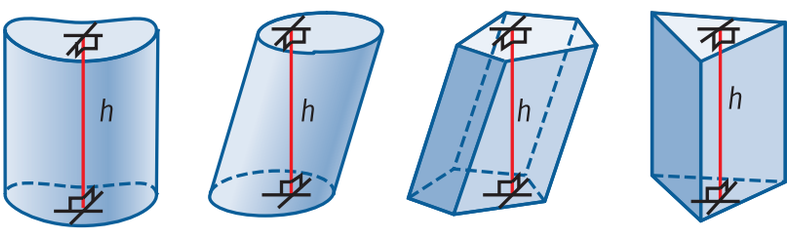
Vastaus

a) 60° b) 54,7° c) 70,5°

Lieriö

Lieriötä rajaavat vaippa sekä kaksi yhtenevää ja yhdensuuntaista pohjaa. Ympyrälieriön pohjat ovat ympyröitä ja särmiön pohjat ovat monikulmioita.

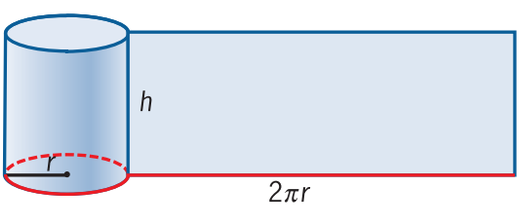
$$A_{\text{lieriö}} = 2A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}}$$
$$V_{\text{lieriö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h$$



suora lieriö | vino ympyrälieriö | vino viisisivuinen särmiö | säännöllinen kolmisivuinen särmiö

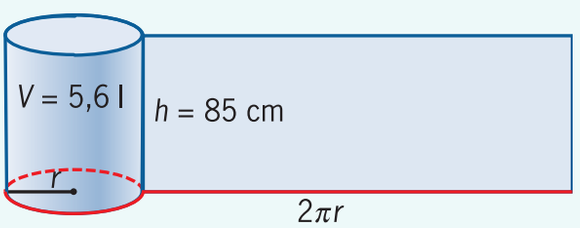
- Suora ympyrälieriö

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2$$
$$A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh$$
$$V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 h$$



Esimerkki 2 Kuparilevystä on valmistettu suoran ympyrälieriön muotoinen putki, jonka pituus on 85 cm ja tilavuus on 5,6 ℓ. Putken ulkopinta maalataan valkoiseksi. Kuinka suuri on maalattava pinta-ala?

Ratkaisu Piirretään mallikuva.



Ympyrälieriön tilavuus on

$$V = \pi r^2 h \qquad \left| \begin{array}{l} v = 5{,}6\ell = 5{,}6\ \text{dm}^3 = 5600\ \text{cm}^3 \\ h = 85\ \text{cm} \end{array} \right.$$

$$5600 = \pi r^2 \cdot 85$$

$$r^2 = \frac{5600}{85\pi}$$

$$r = {}_{(\pm)}\sqrt{\frac{5600}{85\pi}} \qquad \left| r > 0 \right.$$

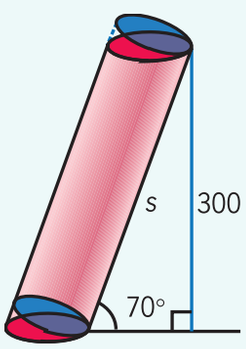
Ympyrälieriön vaipan ala on

$$A = 2\pi rh = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{5600}{85\pi}} \cdot 85 \approx 2400\ (\text{cm}^2)$$

Vastaus Maalattava pinta-ala on 2400 cm^2.

Esimerkki 3 Pyöreä putki, jonka poikkileikkauksen läpimitta on 10 cm, kulkee 3,0 m korkuisen huoneen lattian ja katon läpi muodostaen 70° kulman lattian kanssa. Mikä on huoneessa olevan putken osan tilavuus? [S94, 4a]

Ratkaisu



Olkoon putken pituus s (cm). Vinosta lieriöstä saadaan tilavuudeltaan yhtä suuri suora ympyrälieriö siirtämällä päästä kohtisuoraan leikattu pala toiseen päähän. Vastaavan suoran ympyrälieriön pohjan säde on $\frac{10\ \text{cm}}{2} = 5$ cm ja sen korkeus s saadaan yhtälöstä

$$\sin 70° = \frac{300}{s}$$

$$s = \frac{300}{\sin 70°} = 319{,}253\ldots\ (\text{cm})$$

Putken tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot s = 25074{,}09\ldots\ (\text{cm}^3)$$

Vastaus Putken osan tilavuus on 25 dm^3.

Esimerkki 4

Suorakulmaisen särmiön muotoisen kukkamaljakon pohja on 10 cm × 15 cm ja korkeus 20 cm. Maljakkoon kaadetaan 1,0 ℓ vettä. Kuinka korkealle vedenpinta nousee?

Ratkaisu

Veden tilavuus on $1{,}0\,\ell = 1{,}0\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3$. Olkoon vedenpinta korkeudella x (cm). Saadaan yhtälö

$$V = Ah \qquad \left| \begin{array}{l} V = 1000\ (\text{cm}^3) \\ A = 10 \cdot 15\ (\text{cm}^2) \\ h = x \end{array} \right.$$

$$1000 = 10 \cdot 15 \cdot x$$
$$x = 6{,}666\ldots \approx 6{,}7\ (\text{cm})$$

Vastaus

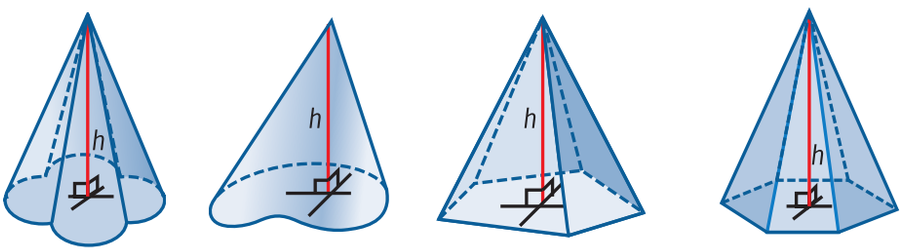
Vedenpinta nousee 6,7 cm:n korkeudelle.

Kartio

Kartiota rajaavat vaippa ja pohja. Ympyräkartion pohja on ympyrä ja pyramidin pohja on monikulmio.

$$A_{\text{kartio}} = A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}}$$

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h$$



suora kartio | vino kartio | viisisivuinen pyramidi | säännöllinen kuusisivuinen pyramidi

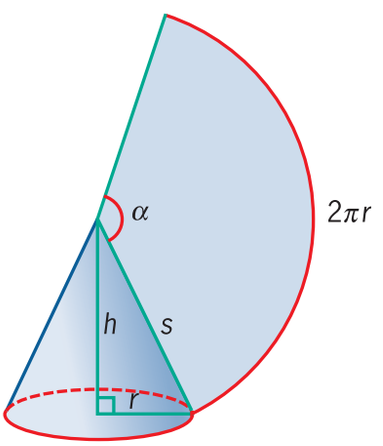
- Suora ympyräkartio

$$h^2 + r^2 = s^2$$

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{vaippa}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi s^2 = \pi rs$$

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



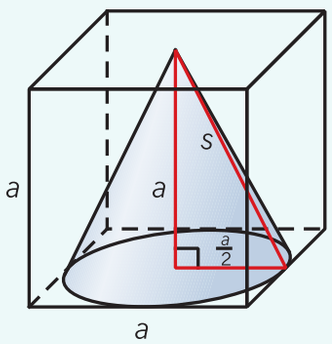
Esimerkki 5

Kuution sisään asetetaan tilavuudeltaan mahdollisimman suuri suora ympyräkartio, jonka korkeus on yhtä suuri kuin kuution särmä ja jonka pohja on kuution tahkolla. Kuinka monta prosenttia

a) kartion tilavuus on kuution tilavuudesta

b) kartion ala on kuution alasta?

Ratkaisu



a) $V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot a = \frac{\pi a^3}{12}$

$V_{\text{kuutio}} = a^3$

$$\frac{V_{\text{kartio}}}{V_{\text{kuutio}}} \cdot 100\ \% = \frac{\frac{\pi a^3}{12}}{a^3} \cdot 100\ \% = \frac{\pi a^3}{12} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot 100\ \%$$

$$= \frac{25\pi}{3}\ \% \approx 26\ \%$$

b) Kartion sivujana saadaan Pythagoraan lauseella.

$$s^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$s^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$s = (\pm)\ \frac{a\sqrt{5}}{2} \qquad \left| s > 0 \right.$$

$$A_{\text{kartio}} = A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \qquad \left| \begin{array}{l} A_{\text{pohja}} = \pi r^2 \\ A_{\text{vaippa}} = \pi rs \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4} = \frac{\pi a^2(1+\sqrt{5})}{4}$$

$$A_{\text{kuutio}} = 6a^2$$

Siis

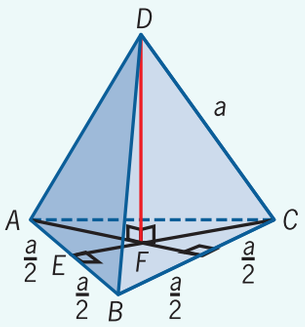
$$\frac{A_{\text{kartio}}}{A_{\text{kuutio}}} \cdot 100\ \% = \frac{\frac{\pi a^2(1+\sqrt{5})}{4}}{6a^2} \cdot 100\ \%$$

$$= \frac{\pi a^2(1+\sqrt{5})}{4} \cdot \frac{1}{6a^2} \cdot 100\ \%$$

$$= \frac{25\pi(1+\sqrt{5})}{6}\ \% \approx 42\ \%$$

Esimerkki 6 Osoita, että säännöllisen tetraedrin tilavuus on $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, jossa a on särmä.

Ratkaisu

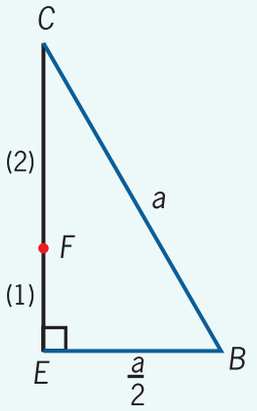


Todistus. Tetraedrin pohjatahko ABC on tasasivuinen kolmio, jonka korkeus CE saadaan kolmiosta EBC.

$$CE^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$CE^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$CE = (\pm)\frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Tetraedrin pohjatahkon ala on

$$A_{\text{pohja}} = \frac{a \cdot CE}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Säännöllisen tetraedrin korkeusjanan DF päätepiste F on pohjatahkon keskipisteessä eli kolmion ABC mediaanien leikkauspisteessä. Tasasivuisen kolmion korkeusjana ja mediaani yhtyvät, joten mediaani on $CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa 2:1 kärjestä lukien, joten

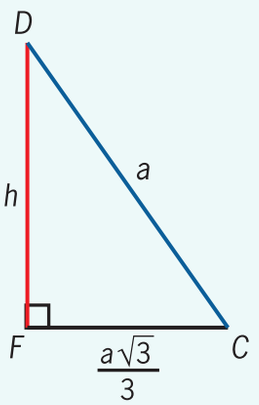
$$CF = \frac{2}{3}\,CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Kolmiosta FCD saadaan

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{6a^2}{9}$$

$$h = (\pm)\frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Tetraedrin tilavuus on

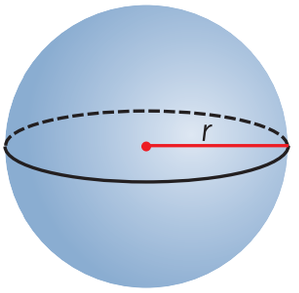
$$V = \frac{1}{3}\,A_{\text{pohja}}\,h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

□

Pallo

$$A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2$$

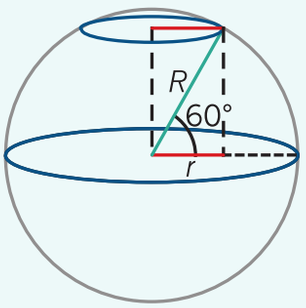
$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Esimerkki 7 Kuinka mones osa 60. leveyspiiri on päiväntasaajasta?

Ratkaisu Olkoon maan säde R ja leveyspiirin säde r.

Piirretään mallikuva.



Kuvan kolmiosta saadaan

$$\cos 60° = \frac{r}{R}$$

| muistikolmiosta tai taulukkokirjasta: $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{R}$$

$$R = 2r$$

Leveyspiirin pituus on $d_1 = 2\pi r$.

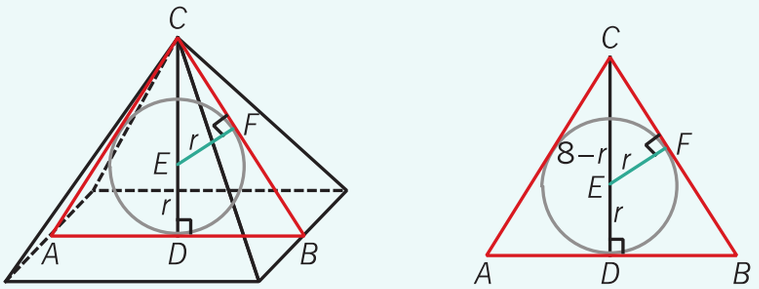
Päiväntasaajan pituus on $d_2 = 2\pi R$.

Pituuksien suhde on $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{2\pi r}{2\pi R} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{r}{2r} = \dfrac{1}{2}$.

Vastaus 60. leveyspiirin pituus on puolet päiväntasaajasta.

Esimerkki 8 Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on 8 ja pohjan sivu 12. Pyramidin sisään asetetaan pallo, joka sivuaa pyramidin tahkoja. Määritä pallon säde.

Ratkaisu Piirretään mallikuva.



Kolmiot EFC ja BDC ovat yhdenmuotoiset (kk), sillä

1. $\sphericalangle C$ on yhteinen
2. $\sphericalangle D = \sphericalangle F\ (= 90°)$.

Vastinosat ovat verrannolliset, joten

$$\frac{EF}{BD} = \frac{EC}{BC}$$

$$\frac{r}{6} = \frac{8 - r}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$\frac{r}{6} = \frac{8 - r}{10}$$

$$10r = 48 - 6r$$

$$16r = 48$$

$$r = 3$$

Vastaus Pallon säde on 3.

4 Analyyttinen geometria

4.1 Peruskäsitteitä

Käyrän yhtälö

Käyrän yhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä, jonka ratkaisuna ovat käyrän pisteet ja vain ne.

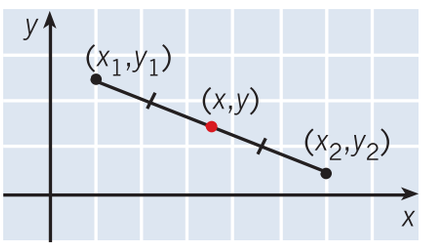
Tason pisteiden etäisyys

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys on

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Janan keskipiste

Jos janan päätepisteet ovat (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), niin sen keskipiste on $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.



Esimerkki 1

a) Osoita, että piste $(-2, 1)$ on käyrällä, jonka yhtälö on $x^2 - 3x + y = 2x^2 + 2y + x + 1$.

b) Millä vakion a arvoilla piste $(a, 2)$ on käyrällä $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$?

Ratkaisu

a) **Todistus.** Kun $x = -2$ ja $y = 1$, niin yhtälön
$x^2 - 3x + y = 2x^2 + 2y + x + 1$

vasen puoli on $(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 11$ ja

oikea puoli on $2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 11$

Siis piste $(-2, 1)$ on käyrällä. □

b) Piste $(a, 2)$ on käyrällä $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, jos sen koordinaatit toteuttavat käyrän yhtälön. Saadaan yhtälö

$$a^2 + 2^2 - 2a - 4 \cdot 2 + 1 = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$a = 3 \quad \text{tai} \quad a = -1$$

Esimerkki 2

Janan AB päätepisteet ovat $A = (a, -a)$ ja $B = (-3a, 2a)$. Määritä a niin, että janan pituus on 5.

Ratkaisu

Saadaan yhtälö

$$\sqrt{[a - (-3a)]^2 + (-a - 2a)^2} = 5$$

$$\sqrt{(4a)^2 + (-3a)^2} = 5$$

$$\sqrt{25a^2} = 5 \qquad \left| \sqrt{a^2} = |a| \right.$$

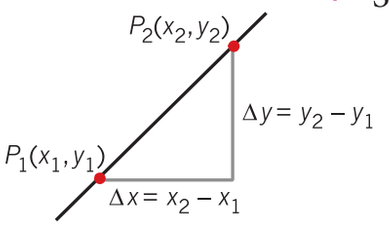
$$5|a| = 5$$

$$|a| = 1$$

$$a = \pm 1$$

4.2 Suora

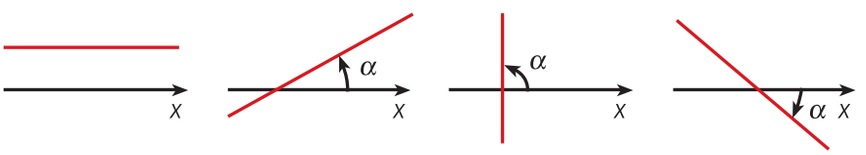
Suoran kaltevuus



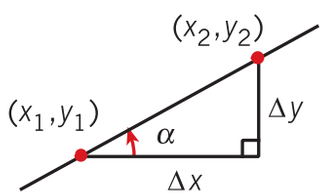
- Suoran **kulmakerroin** on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

- Suoran **suuntakulma** α on suoran ja positiivisen x-akselin välinen suunnattu kulma, $-90° < \alpha \leq 90°$.



vaakasuora suora	nouseva suora	pystysuora suora	laskeva suora
$k = 0$	$k > 0$	ei kulma-kerrointa	$k < 0$
$\alpha = 0°$	$0° < \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$-90° < \alpha < 0°$



- Suoran kulmakertoimen ja suuntakulman välillä on riippuvuus

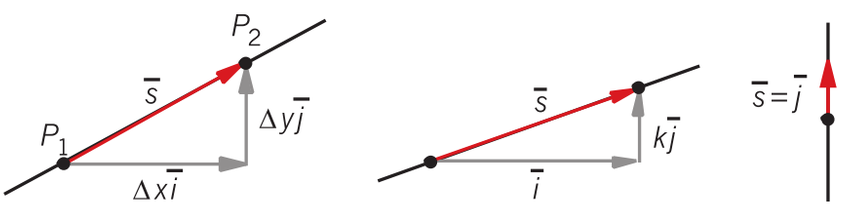
$$k = \tan\alpha, \quad \alpha \neq 90°$$

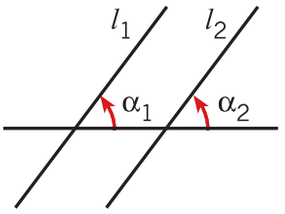
- Suoran **suuntavektori** on vektori, joka on suoran kanssa yhdensuuntainen.

$$\bar{s} = \overline{P_1P_2} = \Delta x\bar{i} + \Delta y\bar{j}$$

$\bar{s} = \bar{i} + k\bar{j}$, jossa k on suoran kulmakerroin

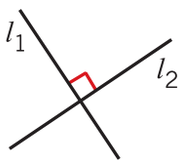
$\bar{s} = \bar{j}$, jos suora on pystysuora





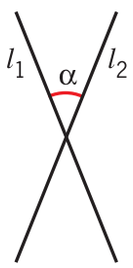
Suorien l_1 ja l_2 yhdensuuntaisuus ($l_1 \parallel l_2$)

- $\sphericalangle(l_1, l_2) = 0°$
- $k_1 = k_2$ tai molemmat suorat ovat pystysuorat
- $\alpha_1 = \alpha_2$



Suorien l_1 ja l_2 kohtisuoruus ($l_1 \perp l_2$)

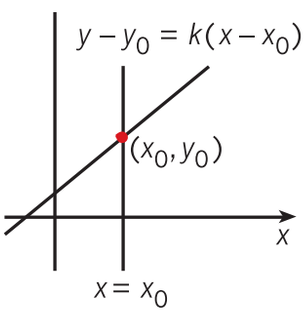
- $\sphericalangle(l_1, l_2) = 90°$
- $k_1 \cdot k_2 = -1$ tai toinen suora on pystysuora ja toinen vaakasuora



Suorien välisen kulman määrittäminen

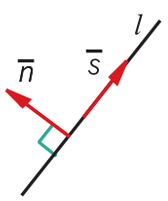
Kulma voidaan määrittää

- suuntakulmien avulla
- kulmakertoimien avulla yhtälöstä $\tan\alpha = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.



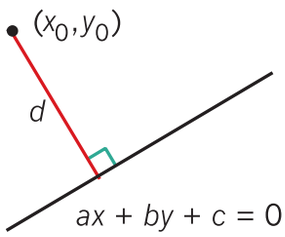
Pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan suoran yhtälö

- Jos suoran kulmakerroin on k, suoran yhtälö on
  $y - y_0 = k(x - x_0)$
- Jos suoralla ei ole kulmakerrointa, suoran yhtälö on
  $x = x_0$



Suoran $ax+by+c=0$ suuntavektori ja normaalivektori

- normaalivektori $\quad \bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j}$
- suuntavektori $\quad \bar{s} = b\bar{i} - a\bar{j}$



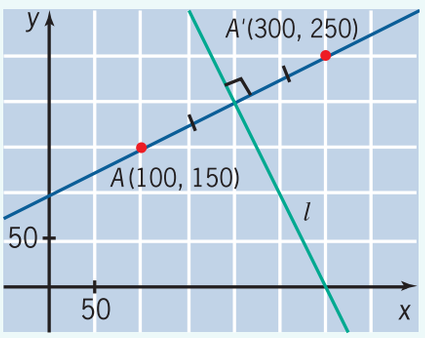
Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esimerkki 1 Pisteen $A = (100, 150)$ peilikuva suoran l suhteen on $A' = (300, 250)$. Määritä peilaussuoran l yhtälö.

Ratkaisu Pisteiden $A = (100, 150)$ ja $A' = (300, 250)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{AA'} = \frac{250 - 150}{300 - 100} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$



Peilaussuoran l kulmakerroin on siten

$$k = -\frac{1}{k_{AA'}} = -2 \qquad \left| \; k_1 \cdot k_2 = -1 \right.$$

Janan AA' keskipiste on peilaussuoran piste. Peilaussuora kulkee siis pisteen $\left(\frac{100 + 300}{2}, \frac{150 + 250}{2}\right) = (200, 200)$ kautta.

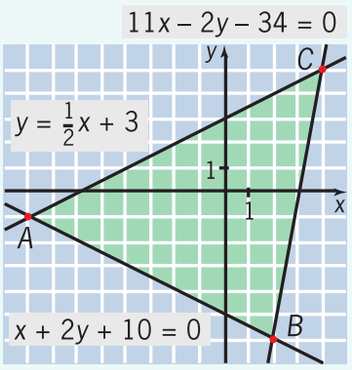
Peilaussuoran yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} y - 200 &= -2(x - 200) \qquad \left| \; y - y_0 = k(x - x_0) \right. \\ y - 200 &= -2x + 400 \\ y &= -2x + 600 \end{aligned}$$

Vastaus Peilaussuoran l yhtälö on $y = -2x + 600$.

Esimerkki 2 Laske suorien $y = \frac{1}{2}x + 3$, $11x - 2y - 34 = 0$ ja $x + 2y + 10 = 0$ muodostaman kolmion pinta-ala.

Ratkaisu Lasketaan kolmion kärkipisteet eli suorien leikkauspisteet.



Piste A:

$$(1)\ \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ (2)\ x + 2y + 10 = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan yhtälöön (2).

$$x + x + 6 + 10 = 0$$
$$x = -8$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot (-8) + 3 = -1$$

Siis $A = (-8, -1)$.

Piste B:

$$+\ \begin{cases} x + 2y + 10 = 0 \\ 11x - 2y - 34 = 0 \end{cases}$$
$$12x - 24 = 0$$
$$x = 2$$
$$2 + 2y + 10 = 0$$
$$y = -6$$

Siis $B = (2, -6)$.

Piste C:

$$(1)\ \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ (3)\ 11x - 2y - 34 = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan yhtälöön (3).

$$11x - x - 6 - 34 = 0$$
$$x = 4$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 5$$

Siis $C = (4, 5)$.

Lasketaan kolmion ABC ala.

Tapa 1

Valitaan kolmion kannaksi AB. Tällöin

$$AB = \sqrt{(-8-2)^2 + (-1+6)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Kolmion korkeus h on pisteen $C = (4, 5)$ etäisyys suorasta $x + 2y + 10 = 0$.

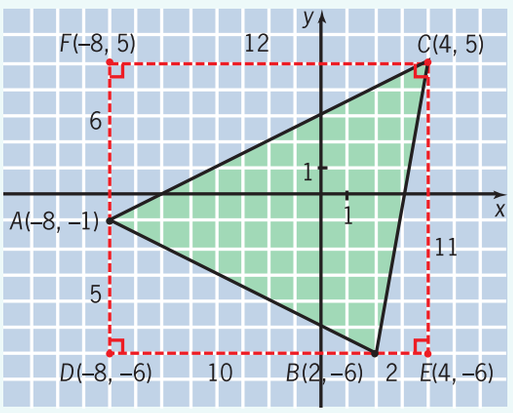
$$h = \frac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{24}{\sqrt{5}}$$

Kolmion ala on

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5} \cdot \frac{24}{\sqrt{5}} = 60$$

Tapa 2

Täydennetään kuvio suorakulmioksi $DECF$.



Kolmion ala on

$$A_{ABC} = A_{DECF} - (A_{DBA} + A_{BEC} + A_{ACF})$$

$$= 12 \cdot 11 - \left(\frac{10 \cdot 5}{2} + \frac{2 \cdot 11}{2} + \frac{12 \cdot 6}{2}\right)$$

$$= 132 - (25 + 11 + 36)$$

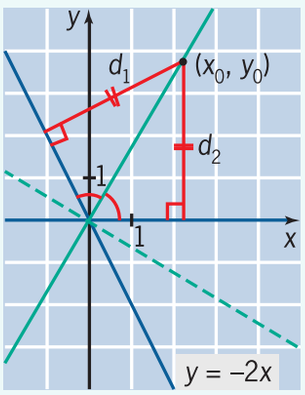
$$= 60$$

Vastaus

Kolmion ala on 60.

Esimerkki 3 Määritä sen suoran kulmakerroin, joka puolittaa x-akselin ja suoran $y = -2x$ välisen tylpän kulman (tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo). [S94, 6b]

Ratkaisu Kulmanpuolittajan mielivaltainen piste (x_0,y_0) on yhtä etäällä kulman kyljistä $2x + y = 0$ ja $y = 0$.



Saadaan yhtälö

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{|2 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = |y_0|$$

$$\frac{|2x_0 + y_0|}{\sqrt{5}} = |y_0|$$

$$|2x_0 + y_0| = \sqrt{5}|y_0|$$

$$|2x_0 + y_0| = |\sqrt{5}y_0| \qquad |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b$$

$$2x_0 + y_0 = \sqrt{5}y_0 \quad \text{tai} \quad 2x_0 + y_0 = -\sqrt{5}y_0$$

$$(\sqrt{5} - 1)\,y_0 = 2x_0 \quad \text{tai} \quad (\sqrt{5} + 1)\,y_0 = -2x_0$$

$$y_0 = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}x_0 \quad \text{tai} \quad y_0 = -\frac{2}{\sqrt{5} + 1}x_0$$

Siis kulmanpuolittajasuorat ovat

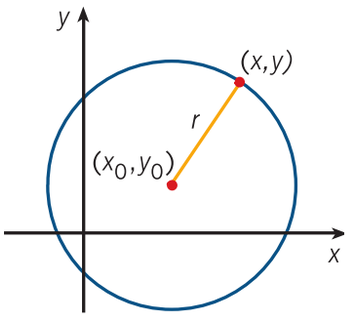
$$y = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{5} - 1}}_{>0}x \quad \text{ja} \quad y = \underbrace{-\frac{2}{\sqrt{5} + 1}}_{<0}x$$

Suoran $y = -2x$ ja x-akselin välisen terävän kulman puolittaja on laskeva suora. Tällöin vastaava tylpän kulman puolittaja on nouseva suora, jonka kulmakerroin on

$$k = \frac{\sqrt{5} + 1)2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1{,}618\ldots \approx 1{,}62$$

Vastaus Kulmakerroin on $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1{,}62$.

4.3 Ympyrä



Ympyrän yhtälö keskipistemuodossa on

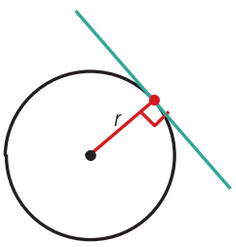
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

jossa r on ympyrän säde ja (x_0, y_0) keskipiste.

Tämän ympyrän yhtälö voidaan esittää yleisessä muodossa

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \text{ jossa } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ympyrän tangentin ominaisuuksia



- Tangentilla ja ympyrällä on täsmälleen yksi yhteinen piste.
- Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.
- Tangentti on säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä.

Esimerkki 1 Määritä ympyrän $x^2 + x + y^2 = 0$ keskipiste ja säde sekä pisteen $(1, 2)$ etäisyys ympyrästä. [S89, 2]

Ratkaisu Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

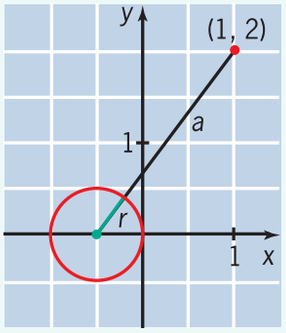
$$x^2 + x + y^2 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Siis keskipiste on $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ja säde on $r = \frac{1}{2}$.



Pisteen (1, 2) etäisyys ympyrän keskipisteestä $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ on

$$d = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2} > r$$

Siis pisteen (1,2) etäisyys ympyrän kehästä on

$$a = d - r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

Vastaus Keskipiste on $(-\frac{1}{2}, 0)$, säde on $\frac{1}{2}$ ja etäisyys on 2.

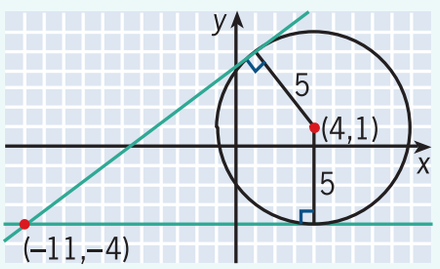
Esimerkki 2 Ympyrän $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 5^2$ tangentti rajaa koordinaattiakselien kanssa kolmion. Määritä kolmion ala, kun tangentti kulkee pisteen $(-11, -4)$ kautta.

Ratkaisu Ympyrän keskipiste on (4, 1) ja säde 5. Pisteen $(-11, -4)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä (4, 1) on

$$d = \sqrt{(-11-4)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{250} > 5$$

joten piste $(-11, -4)$ on ympyrän ulkopuolella.

Tangentteja on siis kaksi.



Olkoon tangentin kulmakerroin k.

Tangentin yhtälö on

$$y - (-4) = k[x - (-11)] \qquad \left| y - y_0 = k(x - x_0) \right.$$

$$y + 4 = kx + 11k$$

$$kx - y + 11k - 4 = 0$$

Ympyrän keskipiste (4, 1) on säteen etäisyydellä tangentista, joten saadaan yhtälö

$$\frac{|k \cdot 4 - 1 + 11k - 4|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 5 \qquad \left| d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right.$$

$$\frac{|15k - 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5$$

$$\underbrace{|15k - 5|}_{\geq 0} = \underbrace{5\sqrt{k^2 + 1}}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$(15k - 5)^2 = 25(k^2 + 1)$$

$$225k^2 - 150k + 25 = 25k^2 + 25$$

$$200k^2 - 150k = 0$$

$$50k(4k - 3) = 0$$

$$k = 0 \quad \text{tai} \quad k = \frac{3}{4}$$

1 Jos $k = 0$, niin tangentti on vaakasuora eikä tangentti muodosta koordinaattiakseleiden kanssa kolmiota. Siis $k = 0$ ei kelpaa.

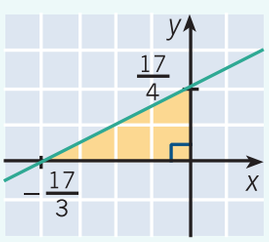
2 Jos $k = \frac{3}{4}$, niin tangentin yhtälö on

$$\frac{3}{4}x - y + 11 \cdot \frac{3}{4} - 4 = 0 \qquad \left| \cdot 4 \right.$$

$$3x - 4y + 33 - 16 = 0$$

$$3x - 4y + 17 = 0$$

Tangentti leikkaa x-akselin, kun $y = 0$:



$$3x - 4 \cdot 0 + 17 = 0 \quad \text{eli} \quad x = -\frac{17}{3}$$

Tangentti leikkaa y-akselin, kun $x = 0$:

$$3 \cdot 0 - 4y + 17 = 0 \quad \text{eli} \quad y = \frac{17}{4}$$

Kolmion ala on $A = \dfrac{\left|-\frac{17}{3}\right| \cdot \frac{17}{4}}{2} = \frac{289}{24} = 12\frac{1}{24}$.

4.4 Paraabeli

YLÖSPÄIN TAI ALASPÄIN AUKEAVA PARAABELI

Paraabelin yhtälö on perusmuodossa

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Paraabelin yhtälö on huippumuodossa

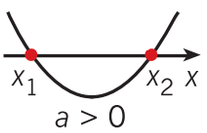
$$y - y_0 = a(x - x_0)^2, \quad a \neq 0$$

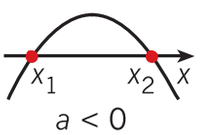
jossa (x_0, y_0) on paraabelin huippu.

Paraabelin yhtälö on nollakohtamuodossa

$$y = a(x - x_1)(x - x_2), \quad a \neq 0$$

jossa x_1 ja x_2 ovat paraabelin nollakohdat.

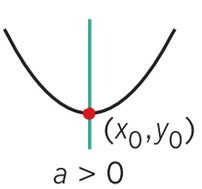


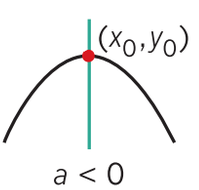


Paraabeli aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$.

Paraabeli aukeaa alaspäin, jos $a < 0$.

Paraabelin huipun x-koordinaatti on $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.





OIKEALLE TAI VASEMMALLE AUKEAVA PARAABELI

Paraabelin yhtälö on perusmuodossa

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0$$

Paraabelin yhtälö on huippumuodossa

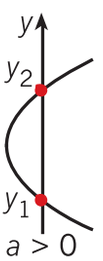
$$x - x_0 = a(y - y_0)^2, \quad a \neq 0$$

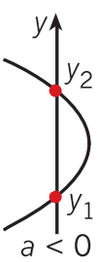
jossa (x_0, y_0) on paraabelin huippu.

Paraabelin yhtälö on nollakohtamuodossa

$$x = a(y - y_1)(y - y_2), \quad a \neq 0$$

jossa y_1 ja y_2 ovat paraabelin nollakohdat.

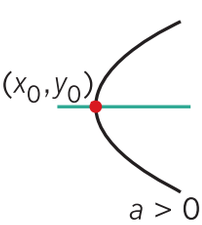


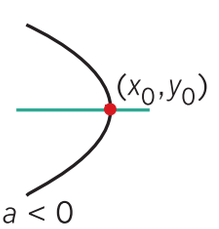


Paraabeli aukeaa oikealle, jos $a > 0$.

Paraabeli aukeaa vasemmalle, jos $a < 0$.

Paraabelin huipun y-koordinaatti on $y_0 = \dfrac{-b}{2a}$.





Esimerkki 1 Alaspäin aukeava paraabeli kulkee pisteiden $(0, 6)$, $(-2, -10)$ ja $(1, 8)$ kautta. Missä pisteissä paraabeli leikkaa x-akselin?

Ratkaisu Alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö perusmuodossa on

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Sijoitetaan pisteiden koordinaatit paraabelin yhtälöön, jolloin saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ -10 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 8 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{l} c = 6 \\ -10 = 4a - 2b + c \\ 8 = a + b + c \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan yhtälöihin (2) ja (3).} \end{array} \right. \\ (2) & \\ (3) & \end{array}$$

$$\begin{cases} -10 = 4a - 2b + 6 \\ 8 = a + b + 6 \end{cases}$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4a - 2b = -16 \\ a + b = 2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} \right.$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 4a - 2b = -16 \\ 2a + 2b = 4 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rl} 6a &= -12 \\ a &= -2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan yhtälöön (4).} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rl} -2 + b &= 2 \\ b &= 4 \end{array}$$

Paraabelin yhtälö on siis $y = -2x^2 + 4x + 6$.

Paraabelin nollakohdat:

$$\begin{array}{rl} -2x^2 + 4x + 6 &= 0 \quad \left| \begin{array}{l} : (-2) \end{array} \right. \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{array}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Vastaus Pisteissä $(-1, 0)$ ja $(3, 0)$.

Esimerkki 2 Oikealle aukeavan paraabelin huippu on pisteessä $(-3, -2)$ ja paraabeli kulkee origon kautta. Määritä paraabelin ja suoran $8x - 9y - 36 = 0$ leikkauspisteet.

Ratkaisu Oikealle aukeavan paraabelin yhtälö on muotoa

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2, \quad a > 0 \qquad \big| \ (x_0, y_0) = (-3, -2)$$
$$x + 3 = a(y + 2)^2 \qquad \big| \ \text{Sijoitetaan } x = 0 \text{ ja } y = 0.$$
$$0 + 3 = a(0 + 2)^2$$
$$3 = 4a$$
$$a = \frac{3}{4} \qquad \big| \ a > 0$$

Siis paraabelin yhtälö on

$$x + 3 = \frac{3}{4}(y + 2)^2 \quad \text{eli} \quad x + 3 = \frac{3}{4}(y^2 + 4y + 4) \quad \text{eli}$$
$$x + 3 = \frac{3}{4}y^2 + 3y + 3 \quad \text{eli} \quad x = \frac{3}{4}y^2 + 3y$$

Leikkauspisteet:

$$\begin{cases} (1) & x = \frac{3}{4}y^2 + 3y \\ (2) & 8x - 9y - 36 = 0 \end{cases} \qquad \big| \ \text{Sijoitetaan yhtälöön (2).}$$

$$8\left(\frac{3}{4}y^2 + 3y\right) - 9y - 36 = 0$$
$$6y^2 + 24y - 9y - 36 = 0 \qquad \big| \ : 3$$
$$2y^2 + 5y - 12 = 0$$
$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 11}{4}$$
$$y = -\frac{16}{4} = -4 \quad \text{tai} \quad y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad \big| \ \text{Sijoitetaan yhtälöön (1).}$$

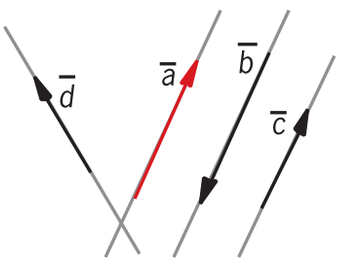
Kun $y = -4$, niin $x = \frac{3}{4} \cdot 16 + 3 \cdot (-4) = 0$.

Kun $y = \frac{3}{2}$, niin $x = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4} + 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{49}{8} = 6\frac{1}{8}$.

Siis leikkauspisteet ovat $(0, -4)$ ja $\left(6\frac{1}{8}, \frac{3}{2}\right)$.

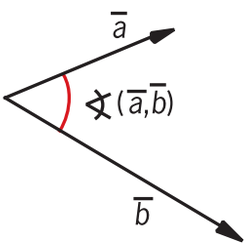
5 Vektorit

5.1 Peruskäsitteitä



$\bar{a} \parallel \bar{b}$ $\quad \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$
$\bar{a} \parallel \bar{c}$ $\quad \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{c}$
$\bar{a} \nparallel \bar{d}$

- Vektorilla on suuruus ja suunta.
- Vektorit ovat **yhdensuuntaiset,** kun niiden kautta kulkevat suorat ovat yhdensuuntaiset. Muutoin vektorit ovat **erisuuntaiset.**
- Yhdensuuntaiset vektorit ovat joko **samansuuntaiset** tai **vastakkaissuuntaiset.**
- Vektorin $\bar{a}$ pituutta merkitään $|\bar{a}|$ tai lyhyesti a. Vastaavasti vektorin $\overline{AB}$ pituutta merkitään $|\overline{AB}|$ tai lyhyesti AB.
- Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat **sama vektori** eli $\bar{a} = \bar{b}$ täsmälleen silloin, kun $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ ja $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.
- Vektorin $\bar{a}$ **vastavektori** on $-\bar{a}$. Tällöin $|\bar{a}| = |-\bar{a}|$ ja $\bar{a} \uparrow\downarrow -\bar{a}$.
- **Yksikkövektorin** pituus on 1. Vektorin $\bar{a}$ kanssa *samansuuntainen* yksikkövektori on $\bar{a}^0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.
- **Nollavektori** on vektori, jonka pituus on nolla ja jolla ei ole määrättyä suuntaa. Nollavektoria merkitään yleensä $\bar{0}$.
- **Vektoreiden $\bar{a} \neq \bar{0}$ ja $\bar{b} \neq \bar{0}$ välinen kulma** on $0° \leq \sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) \leq 180°$.



Vektoreiden yhdensuuntaisuus

Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset eli $\bar{a} \parallel \bar{b}$ täsmälleen silloin, kun $\bar{a} = r\bar{b}$, jossa $r \neq 0$.

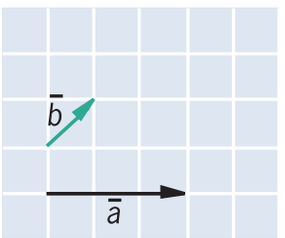
- $\bar{a} \parallel \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = r\bar{b},\ r \neq 0$
- $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = r\bar{b},\ r > 0$
- $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = r\bar{b},\ r < 0$

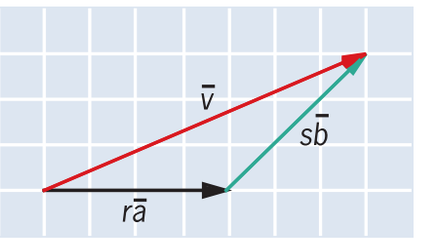
Kantavektoriesitys

Tason kahta erisuuntaista vektoria $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ sanotaan tason kantavektoreiksi. Ne muodostavat tason kannan.

- Tason vektori $\bar{v}$ voidaan esittää kantavektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla muodossa

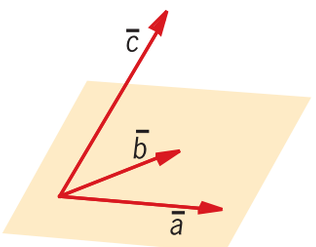
$$\bar{v} = r\bar{a} + s\bar{b}, \text{ jossa } r, s \in \mathbb{R}$$





- Tason vektorin esitys kantavektoreiden avulla (kantavektoriesitys) on yksikäsitteinen, joten

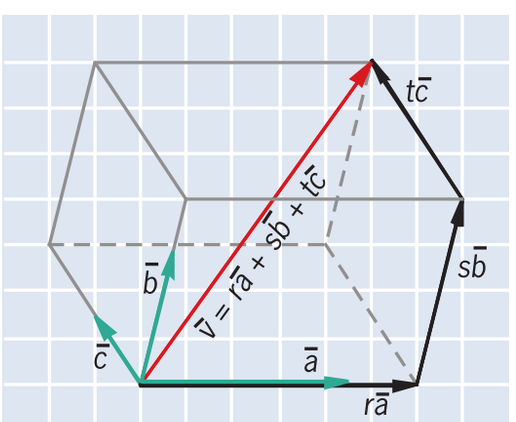
$$r\bar{a} + s\bar{b} = t\bar{a} + u\bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = t \\ s = u \end{cases}$$



Avaruuden kolmea vektoria $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$, jotka kaikki eivät ole samassa tasossa, sanotaan avaruuden kantavektoreiksi. Ne muodostavat avaruuden kannan.

- Avaruuden vektori $\bar{v}$ voidaan esittää kantavektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$, avulla muodossa

$$\bar{v} = r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}, \text{ jossa } r, s, t \in \mathbb{R}$$



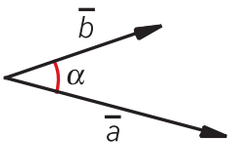
- Avaruuden vektorin esitys kantavektoreiden avulla (kantavektoriesitys) on yksikäsitteinen, joten

$$r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c} = u\bar{a} + v\bar{b} + w\bar{c} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = u \\ s = v \\ t = w \end{cases}$$

Pistetulo

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha$, kun $\bar{a} \neq \bar{0}$ ja $\bar{b} \neq \bar{0}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, kun $\bar{a} = \bar{0}$ tai $\bar{b} = \bar{0}$



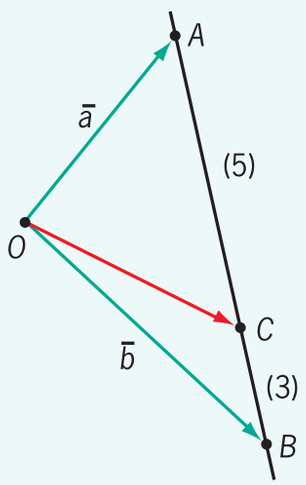
Pistetulon ominaisuuksia

1. $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$
2. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$
3. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$
4. $(s\bar{a}) \cdot (r\bar{b}) = (sr)\bar{a} \cdot \bar{b}$
5. Olkoon vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma α. Tällöin
   - $\alpha < 90° \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} > 0$
   - $\alpha = 90° \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$
   - $\alpha > 90° \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} < 0$

Esimerkki 1

Olkoon $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ ja $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$. Piste C jakaa janan AB suhteessa $5:3$. Määritä vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla vektori $\overrightarrow{OC}$.

Ratkaisu



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \bar{a} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} \\ &= \bar{a} + \frac{5}{8}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \bar{a} + \frac{5}{8}(-\bar{a} + \bar{b}) \\ &= \frac{3}{8}\bar{a} + \frac{5}{8}\bar{b}\end{aligned}$$

Vastaus

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{8}\bar{a} + \frac{5}{8}\bar{b}$$

Esimerkki 2 Yksikkövektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Määritä vektorin $\bar{c}$ pituus, kun $\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c} = \bar{0}$. [K89, 3]

Ratkaisu Ratkaistaan vektori $\bar{c}$ yhtälöstä

$$\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c} = \bar{0}$$

$$3\bar{c} = -\bar{a} - 2\bar{b} \qquad \Big| : 3$$

$$\bar{c} = -\frac{\bar{a}}{3} - \frac{2\bar{b}}{3}$$

Koska $\bar{c} \cdot \bar{c} = |\bar{c}|^2$, niin

$$|\bar{c}|^2 = \left(-\frac{1}{3}\bar{a} - \frac{2}{3}\bar{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\bar{a} - \frac{2}{3}\bar{b}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\bar{a} - \frac{2}{3}\bar{b}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\bar{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\bar{a}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\bar{b}\right) + \left(\frac{2}{3}\bar{b}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}\bar{a}^2 + \frac{4}{9}\bar{a} \cdot \bar{b} + \frac{4}{9}\bar{b}^2$$

$$= \frac{1}{9}|\bar{a}|^2 + \frac{4}{9}\bar{a} \cdot \bar{b} + \frac{4}{9}|\bar{b}|^2$$

$$= \frac{1}{9} + 0 + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$|\bar{a}|^2 = 1^2 = 1$
$|\bar{b}|^2 = 1^2 = 1$
$\bar{a} \perp \bar{b}$, joten $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

Tällöin $|\bar{c}| = {}_{(\pm)}\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Vastaus Vektorin $\bar{c}$ pituus on $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

5.2 Vektorit koordinaatistossa

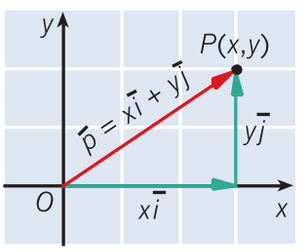
Vektorit *xy*-koordinaatistossa

Suorakulmaisen *xy*-koordinaatiston kantavektorit ovat vektorit $\vec{i}$ ja $\vec{j}$.

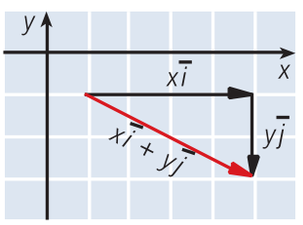
- Kantavektoriesitys on yksikäsitteinen, joten

$$r\vec{i} + s\vec{j} = t\vec{i} + u\vec{j} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = t \\ s = u \end{cases}$$

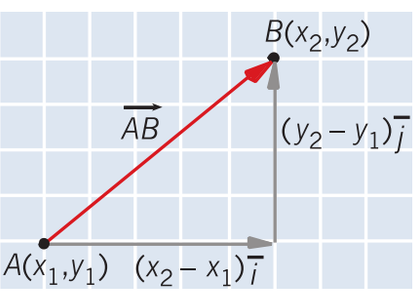
- Pisteen $P = (x, y)$ **paikkavektori** on $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



- Vektorin $x\vec{i} + y\vec{j}$ pituus on $\sqrt{x^2 + y^2}$.



- Pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ välinen vektori on $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$.



- Pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ etäisyys eli janan AB pituus on yhtä suuri kuin vektorin $\overrightarrow{AB}$ pituus. Siis

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Vektoreiden $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ ja $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ pistetulo on $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Esimerkki 1 Määritä vakio t niin, että vektoreiden $\bar{a} = \bar{i} + t\bar{j}$ ja $\bar{b} = t\bar{i} + \bar{j}$ välinen kulma on 60°.

Ratkaisu Pistetulon määritelmän mukaan $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\alpha$, joten

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \qquad \left| \begin{array}{l} \bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 \\ |\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

$$\cos 60° = \frac{1 \cdot t + t \cdot 1}{\sqrt{1^2 + t^2}\sqrt{t^2 + 1^2}} \qquad \left| \cos 60° = \frac{1}{2} \right.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$t^2 + 1 = 4t$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

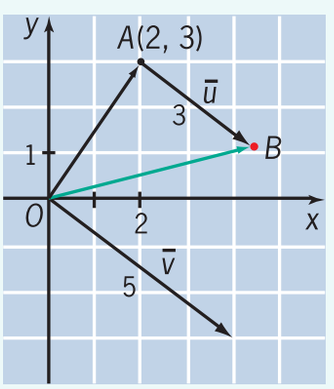
$$t = 2 \pm \sqrt{3}$$

Esimerkki 2 Vektorin $\bar{u} = \overline{AB}$ alkupiste $A = (2, 3)$, vektorin $\bar{u}$ suunta on sama kuin vektorin $\bar{v} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$, ja vektorin $\bar{u}$ pituus on 3. Määritä piste B. [K92, 4b]

Tapa 1 Pisteen B paikkavektori on

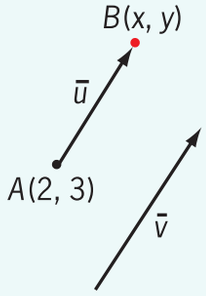
$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= \overline{OA} + \bar{u} \\ &= 2\bar{i} + 3\bar{j} + \frac{3}{5}\bar{v} \\ &= 2\bar{i} + 3\bar{j} + \frac{3}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j}) \\ &= 2\bar{i} + 3\bar{j} + \frac{12}{5}\bar{i} - \frac{9}{5}\bar{j} \\ &= \frac{22}{5}\bar{i} + \frac{6}{5}\bar{j} \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} |\bar{v}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \\ \text{joten } \bar{u} = 3\bar{v}^0 = 3\,\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \dfrac{3}{5}\bar{v} \end{array} \right.$$



Siis $B = \left(\frac{22}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

Tapa 2



Olkoon $B = (x, y)$.

Koska $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$, saadaan $\overline{u} = (x-2)\overline{i} + (y-3)\overline{j}$.

Toisaalta $\overline{u} = 3\overline{v}^0$.

Vektorin $\overline{v}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori on

$$\overline{v}^0 = \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{4\overline{i} - 3\overline{j}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4\overline{i} - 3\overline{j}}{5} = \frac{4}{5}\overline{i} - \frac{3}{5}\overline{j}$$

Siis $\overline{u} = 3\overline{v}^0 = \frac{12}{5}\overline{i} - \frac{9}{5}\overline{j}$.

Saadaan yhtälö

$$(x-2)\overline{i} + (y-3)\overline{j} = \frac{12}{5}\overline{i} - \frac{9}{5}\overline{j}$$

Kantavektoriesitys on yksikäsitteinen, joten

$$\begin{cases} x - 2 = \frac{12}{5} \\ y - 3 = -\frac{9}{5} \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x = \frac{22}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Piste B on siis $\left(\frac{22}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

Esimerkki 3

Olkoon $\overline{a} = 4\overline{i} - 2\overline{j}$, $\overline{b} = -3\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{c} = d\overline{i} + (d+1)\overline{j}$. Onko sellaisia reaalilukuja d, joilla vektorit $\overline{a} + \overline{c}$ ja $\overline{b} + \overline{c}$ ovat samansuuntaiset? [K96, 5b]

Ratkaisu

$$\overline{a} + \overline{c} = 4\overline{i} - 2\overline{j} + d\overline{i} + (d+1)\overline{j} = (d+4)\overline{i} + (d-1)\overline{j}$$

$$\overline{b} + \overline{c} = -3\overline{i} + \overline{j} + d\overline{i} + (d+1)\overline{j} = (d-3)\overline{i} + (d+2)\overline{j}$$

Vektorit $\overline{a} + \overline{c}$ ja $\overline{b} + \overline{c}$ ovat samansuuntaiset täsmälleen silloin, kun on olemassa reaaliluku $r > 0$ niin, että

$$\begin{aligned} \overline{a} + \overline{c} &= r(\overline{b} + \overline{c}) \\ (d+4)\overline{i} + (d-1)\overline{j} &= r((d-3)\overline{i} + (d+2)\overline{j}) \\ (d+4)\overline{i} + (d-1)\overline{j} &= r(d-3)\overline{i} + r(d+2)\overline{j} \end{aligned}$$

Kantavektoriesitys on yksikäsitteinen, joten

$$\begin{cases} d+4 = r(d-3) \\ d-1 = r(d+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d+4 = rd-3r \\ d-1 = rd+2r \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot\, 1 \\ \cdot\, (-1) \end{array}$$

$$+ \begin{cases} d+4 = rd-3r \\ -d+1 = -rd-2r \end{cases}$$

$$5 = -5r$$

$$r = -1$$

Koska $r < 0$, niin $\bar{a} + \bar{c} \nuparrow\downarrow \bar{b} + \bar{c}$. Siis ei ole olemassa reaalilukua d niin, että vektorit $\bar{a} + \bar{c}$ ja $\bar{b} + \bar{c}$ olisivat samansuuntaiset.

Esimerkki 4

Jaa vektori $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j}$ kahteen keskenään kohtisuoraan komponenttiin, joista toinen on suoran $3x - y + 2 = 0$ suuntainen. [K83, 4a]

Ratkaisu

Taulukkokirjan mukaan suoran $ax + by + c = 0$ suuntavektori on $\bar{s} = b\bar{i} - a\bar{j}$ ja normaalivektori $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j}$. Tällöin suoran $3x - y + 2 = 0$

- suuntavektori on $\bar{s} = -\bar{i} - 3\bar{j}$
- normaalivektori on $\bar{n} = 3\bar{i} - \bar{j}$.

Määritetään vakiot t ja u niin, että $\bar{a} = t\bar{s} + u\bar{n}$.

$$2\bar{i} - 5\bar{j} = t(-\bar{i} - 3\bar{j}) + u(3\bar{i} - \bar{j})$$
$$2\bar{i} - 5\bar{j} = -t\bar{i} - 3t\bar{j} + 3u\bar{i} - u\bar{j}$$
$$2\bar{i} - 5\bar{j} = (-t + 3u)\bar{i} + (-3t - u)\bar{j}$$

Kantavektoriesitys on yksikäsitteinen, joten

$$\begin{cases} -t + 3u = 2 \\ -3t - u = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot\, (-3) \\ \\ \cdot\, 3 \end{array}$$

$$+ \begin{cases} 3t - 9u = -6 \\ -3t - u = -5 \end{cases} \qquad + \begin{cases} -t + 3u = 2 \\ -9t - 3u = -15 \end{cases}$$

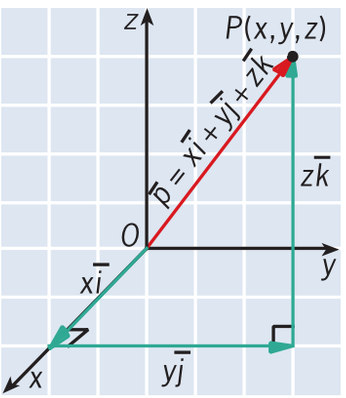
$$-10u = -11 \qquad -10t = -13$$

$$u = \frac{11}{10} \qquad t = \frac{13}{10}$$

Siis $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j} = \frac{13}{10}(-\bar{i} - 3\bar{j}) + \frac{11}{10}(3\bar{i} - \bar{j})$.

Vektorit *xyz*-koordinaatistossa

Suorakulmaisen *xyz*-koordinaatiston kantavektorit ovat vektorit $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$.



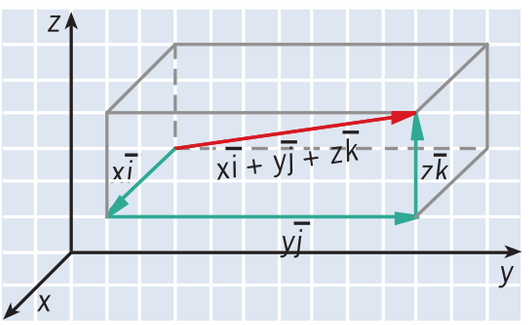
- Kantavektoriesitys on yksikäsitteinen.

$$r\bar{i} + s\bar{j} + t\bar{k} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k} \Leftrightarrow \begin{cases} r = u \\ s = v \\ t = w \end{cases}$$

- Pisteen $P = (x, y, z)$ **paikkavektori** on

$$\bar{p} = \overrightarrow{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

- Vektorin $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ pituus on $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



- Pisteiden $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja $B = (x_2, y_2, z_2)$ välinen vektori on

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

- Pisteiden $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja $B = (x_2, y_2, z_2)$ etäisyys on yhtä suuri kuin vektorin $\overrightarrow{AB}$ pituus. Siis

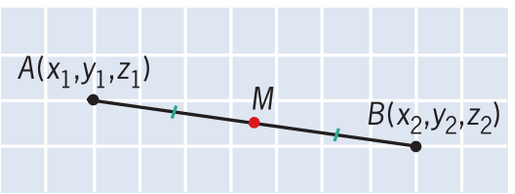
$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Janan keskipiste saadaan janan päätepisteiden koordinaattien keskiarvona.

  Olkoot janan AB päätepisteet $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja $B = (x_2, y_2, z_2)$.

Tällöin janan AB keskipiste on

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



- Vektoreiden $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ ja $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ pistetulo on $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Esimerkki 5

Määritä reaaliluku r niin, että vektoreiden $\bar{a} = r\bar{i} + \left(\frac{r}{2} + 1\right)\bar{j} - \bar{k}$ ja $\bar{b} = \left(\frac{r}{2} - 1\right)\bar{j} - 4\bar{k}$ summa ja erotus ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu

Määritetään ensin vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ summa ja erotus.

$$\begin{aligned}
\bar{a} + \bar{b} &= r\bar{i} + \left(\frac{r}{2} + 1\right)\bar{j} - \bar{k} + \left(\frac{r}{2} - 1\right)\bar{j} - 4\bar{k} \\
&= r\bar{i} + r\bar{j} - 5\bar{k} \\
\bar{a} - \bar{b} &= r\bar{i} + \left(\frac{r}{2} + 1\right)\bar{j} - \bar{k} - \left[\left(\frac{r}{2} - 1\right)\bar{j} - 4\bar{k}\right] \\
&= r\bar{i} + \cancel{\frac{r}{2}\bar{j}} + \bar{j} - \bar{k} - \cancel{\frac{r}{2}\bar{j}} + \bar{j} + 4\bar{k} \\
&= r\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}
\end{aligned}$$

Vektorit ovat kohtisuorassa, jos niiden pistetulo on nolla. Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) &= 0 \qquad \left| \begin{array}{l} \bar{a} + \bar{b} = r\bar{i} + r\bar{j} - 5\bar{k} \\ \bar{a} - \bar{b} = r\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} \end{array} \right. \\
r \cdot r + r \cdot 2 + (-5) \cdot 3 &= 0 \\
r^2 + 2r - 15 &= 0 \\
r &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2} \\
r &= 3 \quad \text{tai} \quad r = -5
\end{aligned}$$

Vastaus

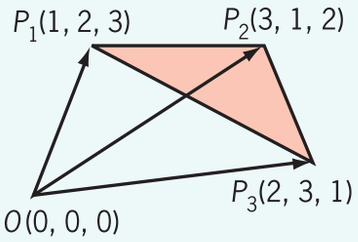
$r = 3$ tai $r = -5$

Esimerkki 6

Olkoon $\overline{OP}_1 = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\overline{OP}_2 = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ ja $\overline{OP}_3 = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$. Laske kolmion $P_1P_2P_3$ ala. [S96, 5a]

Ratkaisu

Määritetään kolmion $P_1P_2P_3$ sivujen pituudet.

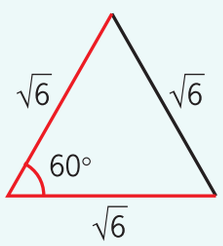


$$P_1P_3 = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (2-3)^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$P_2P_3 = \sqrt{(2-3)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Koska $P_1P_3 = P_1P_2 = P_2P_3$, kolmio $P_1P_2P_3$ on tasasivuinen, joten kolmion kulmat ovat 60°.



Kolmion ala on

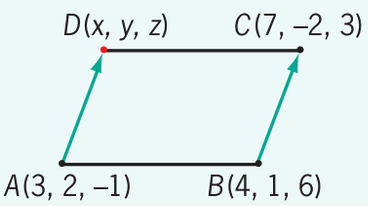
$$A = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}\,\sqrt{6}\,\sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Esimerkki 7

Pisteiden $A = (3, 2, -1)$, $B = (4, 1, 6)$ ja $C = (7, -2, 3)$ määräämästä tasosta on etsittävä kaikki sellaiset pisteet D, että nelikulmio $ABCD$ on suunnikas. [S87, 10a]

Ratkaisu

Nelikulmio $ABCD$ on suunnikas täsmälleen silloin, kun $\overline{AD} = \overline{BC}$.



Saadaan yhtälö

$$(x-3)\bar{i} + (y-2)\bar{j} + [(z-(-1)]\bar{k} = (7-4)\bar{i} + (-2-1)\bar{j} + (3-6)\bar{k}$$
$$(x-3)\bar{i} + (y-2)\bar{j} + (z+1)\bar{k} = 3\bar{i} - 3\bar{j} - 3\bar{k}$$

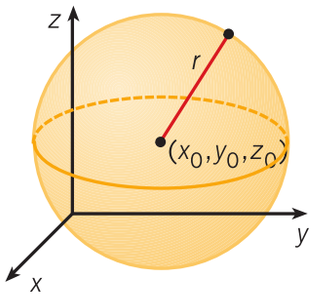
Kantavektoriesitys on yksikäsitteinen, joten

$$\begin{cases} x-3 = 3 \\ y-2 = -3 \\ z+1 = -3 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \\ z = -4 \end{cases}$$

Vastaus

$D = (6, -1, -4)$

Pallo



Pallon yhtälö keskipistemuodossa on

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

jossa (x_0, y_0, z_0) on pallon keskipiste ja r säde.

Tämä pallon yhtälö voidaan esittää yleisessä muodossa $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, jossa $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 8 Laske pallon $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$ pinta-ala.

Ratkaisu Määritetään pallon säde muuntamalla pallon yhtälö keskipistemuotoon.

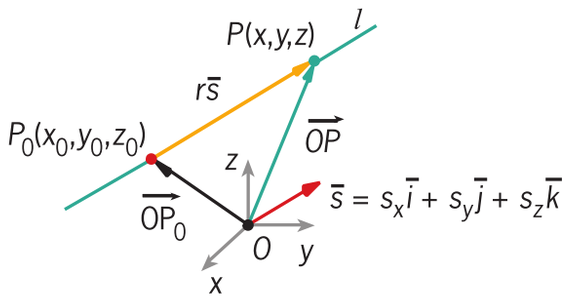
$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2-2x+4y-4&=0\\
x^2-2x+y^2+4y+z^2-4&=0 \quad \left|\begin{array}{l} a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\\ a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\end{array}\right.\\
x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+y^2+2\cdot y\cdot 2+2^2-2^2+z^2-4&=0\\
(x-1)^2-1^2+(y+2)^2-2^2+z^2-4&=0\\
(x-1)^2+(y+2)^2+z^2&=1^2+2^2+4\\
(x-1)^2+(y+2)^2+z^2&=9\\
(x-1)^2+[y-(-2)]^2+(z-0)^2&=3^2
\end{aligned}$$

Pallon säde on siis $r=3$, joten pallon pinta-ala on

$$A=4\pi r^2=4\pi\cdot 3^2=36\pi$$

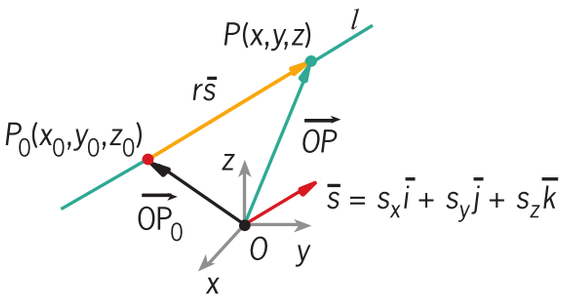
Suoran esitys vektorimuodossa

- $\overline{OP}=\overline{OP}_0+r\bar{s},\ r\in\mathbb{R}$
- $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=x_0\bar{i}+y_0\bar{j}+z_0\bar{k}+r(s_x\bar{i}+s_y\bar{j}+s_z\bar{k}),\ r\in\mathbb{R}$
- $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=(x_0+rs_x)\bar{i}+(y_0+rs_y)\bar{j}+(z_0+rs_z)\bar{k},\ r\in\mathbb{R}$



Suoran esitys koordinaattimuodossa

$$\begin{cases} x = x_0 + rs_x \\ y = y_0 + rs_y \\ z = z_0 + rs_z \end{cases} \qquad (r \in \mathbb{R})$$



Esimerkki 9

Pisteestä $P_1 = (10, 0, 0)$ lähetetään valonsäde suuntaan $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ ja pisteestä $P_2 = (310, 480, 400)$ suuntaan $\vec{v}_2 = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k}$. Kohtaavatko valonsäteet toisensa? [K93, 7a]

Tapa 1

Pisteen $P_1 = (10, 0, 0)$ kautta kulkevan ja vektorin $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ suuntaisen suoran esitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = x_0 + rs_x \\ y = y_0 + rs_y \\ z = z_0 + rs_z \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \qquad \begin{vmatrix} (x_0, y_0, z_0) = (10, 0, 0) \\ s_x = 2 \\ s_y = 4 \\ s_z = 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 10 + 2r \\ y = 0 + 4r \\ z = 0 + 3r \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} x = 10 + 2r \\ y = 4r \\ z = 3r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$$

Vastaavasti pisteen $P_2 = (310, 480, 400)$ kautta kulkevan ja vektorin $\vec{v}_2 = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k}$ suuntaisen suoran esitys koordinaattimuodossa on

$$\begin{cases} x = 310 - 4t \\ y = 480 - 6t \\ z = 400 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Tutkitaan leikkaavatko suorat toisensa.

Ratkaistaan yhtälöryhmä.

$$\begin{array}{ll} (1) & 10 + 2r = 310 - 4t \\ (2) & 4r = 480 - 6t \\ (3) & 3r = 400 - 5t \end{array}$$

Yhtälöitä on 3 ja tuntemattomia 2.

Ratkaistaan yhtälöistä (2) ja (3) parametrit r ja t. Tutkitaan sitten, toteuttaako saatu ratkaisu myös yhtälön (1).

$$\begin{array}{ll} (2) & 4r = 480 - 6t \quad | \cdot 3 \\ (3) & 3r = 400 - 5t \quad | \cdot (-4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12r = 1440 - 18t \\ -12r = -1600 + 20t \\ \hline 0 = -160 + 2t \\ t = 80 \end{array}$$

Sijoitetaan yhtälöön (2).

$4r = 480 - 6 \cdot 80$ eli $4r = 0$ eli $r = 0$

Kun $t = 80$ ja $r = 0$, niin yhtälön (1) $10 + 2r = 310 - 4t$

vasen puoli on $10 + 2 \cdot 0 = 10$ ja

oikea puoli on $310 - 4 \cdot 80 = -10$

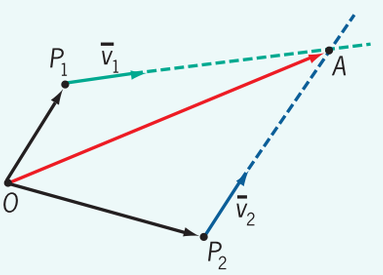
Siis yhtälö (1) ei toteudu, joten suorilla ei ole leikkauspistettä. Näin ollen valonsäteet eivät kohtaa toisiaan.

Tapa 2

Oletetaan, että valonsäteet kohtaavat toisensa pisteessä A.

Tällöin $\overline{OA} = \overline{OP}_1 + r\bar{v}_1$, $r \geq 0$.

Toisaalta $\overline{OA} = \overline{OP}_2 + s\bar{v}_2$, $s \geq 0$.



Saadaan yhtälö

$$\overline{OP}_1 + r\bar{v}_1 = \overline{OP}_2 + s\bar{v}_2$$

$$10\bar{i} + r(2\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}) = 310\bar{i} + 480\bar{j} + 400\bar{k} + s(-4\bar{i} - 6\bar{j} - 5\bar{k})$$

$$(10 + 2r)\bar{i} + 4r\bar{j} + 3r\bar{k} = (310 - 4s)\bar{i} + (480 - 6s)\bar{j} + (400 - 5s)\bar{k}$$

Kantavektoriesitys on yksikäsitteinen, joten

$$\begin{cases} 10 + 2r = 310 - 4s \\ 4r = 480 - 6s \\ 3r = 400 - 5s \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} r + 2s = 150 \\ 2r + 3s = 240 \\ 3r + 5s = 400 \end{cases}$$

Ratkaistaan r ja s yhtälöistä (1) ja (2).

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \left| \begin{matrix} r + 2s = 150 \\ 2r + 3s = 240 \end{matrix} \right| \cdot (-2)$$

$$+ \begin{cases} -2r - 4s = -300 \\ 2r + 3s = 240 \end{cases}$$

$$-s = -60$$

$$s = 60$$

Kun sijoitetaan $s = 60$ yhtälöön (1), saadaan

$r + 2 \cdot 60 = 150$ eli $r = 30$

Kun $r = 30$ ja $s = 60$, niin yhtälön (3) $3r + 5s = 400$

vasen puoli on $3 \cdot 30 + 5 \cdot 60 = 90 + 300 = 390$ ja

oikea puoli on 400

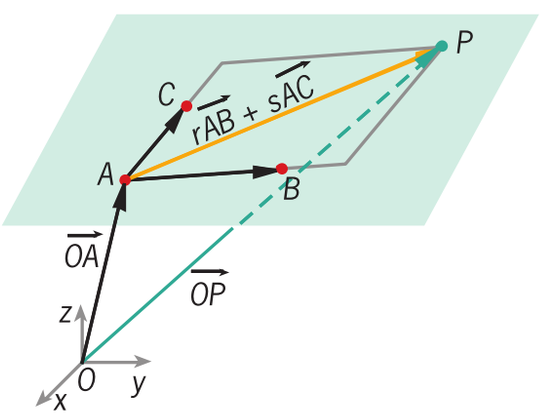
Siis yhtälö (3) ei toteudu, joten ei ole olemassa pistettä A, jossa valonsäteet kohtaavat.

Tason yhtälö vektorimuodossa

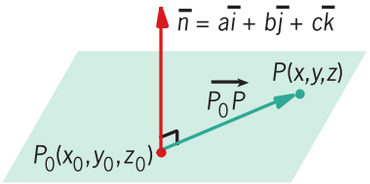
Tason ABC mielivaltaisen pisteen P paikkavektori on

$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$ eli

$\overline{OP} = \overline{OA} + r\overline{AB} + s\overline{AC}$, jossa $r, s \in \mathbb{R}$



Tason yhtälö normaalimuodossa



Jos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ on tason piste ja $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ tason normaalivektori, niin tason yhtälö on

- $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
- $ax + by + cz + d = 0$

Toisaalta yhtälö $ax + by + cz + d = 0$, jossa $a \neq 0$ tai $b \neq 0$ tai $c \neq 0$, esittää aina xyz-koordinaatiston tasoa, jonka eräs normaalivektori on $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$.

Esimerkki 10 Määritä tason ABC yhtälö, kun $A = (0, 0, -6)$, $B = (-2, 1, 2)$ ja $C = (-2, 0, 0)$. Onko piste $D = (1, 1, -7)$ tasolla ABC?

Ratkaisu

Tason ABC yhtälö normaalimuodossa on $ax + by + cz + d = 0$.

Saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot (-6) + d = 0 \\ a \cdot (-2) + b \cdot 1 + c \cdot 2 + d = 0 \\ a \cdot (-2) + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} -6c + d = 0 \\ -2a + b + 2c + d = 0 \\ -2a + d = 0 \end{cases}$$

(1) $d = 6c$ | Sijoitetaan yhtälöihin (2) ja (3).
(2) $-2a + b + 2c + d = 0$
(3) $-2a + d = 0$

$$\begin{cases} -2a + b + 2c + 6c = 0 \\ -2a + 6c = 0 \end{cases}$$

(4) $-2a + b + 8c = 0$ | Sijoitetaan yhtälöön (4).
(5) $a = 3c$

$$-2 \cdot 3c + b + 8c = 0$$
$$b = -2c$$

Siis $a = 3c$, $b = -2c$ ja $d = 6c$.

Tason yhtälö on

$ax + by + cz + d = 0$ | $a = 3c$, $b = -2c$, $d = 6c$
$3cx - 2cy + cz + 6c = 0$ | $: c \ (\neq 0)$
$3x - 2y + z + 6 = 0$

Tutkitaan, toteuttaako piste $D = (1, 1, -7)$ tason yhtälön.

Kun $x = 1$, $y = 1$ ja $z = -7$, niin tason yhtälön

vasen puoli on $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 7 + 6 = 0$ ja

oikea puoli on 0

Piste D on tasolla ABC, koska pisteen D koordinaatit toteuttavat tason yhtälön.

Vastaus Tason ABC yhtälö on $3x - 2y + z + 6 = 0$. Piste D on tasolla.

Esimerkki 11 Pallon tangenttitaso on taso, joka sivuaa palloa yhdessä pisteessä. Määritä pallon $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ pisteeseen $(-1, 0, 5)$ asetetun tangenttitason yhtälö.

Ratkaisu Muunnetaan pallon yhtälö keskipistemuotoon.

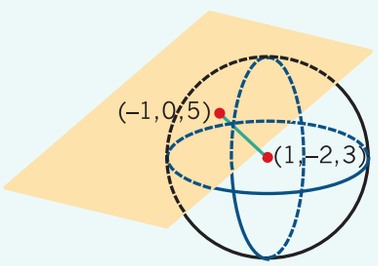
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 5 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + z^2 - 2 \cdot z \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 - 5$$

$$(x - 1)^2 + [y - (-2)]^2 + (z - 3)^2 = 3^2$$



Pallon keskipisteen $(1, -2, 3)$ ja tangenttitason sivuamispisteen $(-1, 0, 5)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa tangenttitasoa vastaan. Tangenttitason normaalivektoriksi voidaan siten valita pallon keskipisteen ja sivuamispisteen välinen vektori.

$$\vec{n} = (-1-1)\vec{i} + [0 - (-2)]\vec{j} + (5 - 3)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Sivuamispiste $(-1, 0, 5)$ on tangenttitason piste, joten tangenttitason yhtälöksi saadaan

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{n} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ (x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, 5) \end{array} \right.$$

$$-2\,(x + 1)) + 2(y - 0) + 2(z - 5) = 0$$

$$-2x - 2 + 2y + 2z - 10 = 0$$

$$-2x + 2y + 2z - 12 = 0 \quad \left| : 2 \right.$$

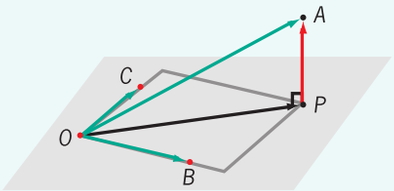
$$-x + y + z - 6 = 0$$

Vastaus Tangenttitason yhtälö on $-x + y + z - 6 = 0$.

Esimerkki 12

Laske pisteen A etäisyys pisteiden O, B ja C määräämästä tasosta OBC, kun $\overline{OA} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$, $\overline{OB} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ ja $\overline{OC} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$. [K87, 8b]

Ratkaisu



Olkoon piste P sellainen tason OBC piste, että vektori $\overline{PA}$ on tason OBC normaalivektori.

Vektoreiden $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$ virittämän tason OBC vektori $\overline{OP}$ on muotoa

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= r\overline{OB} + s\overline{OC}\\ &= r(\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}) + s(2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k})\\ &= (r + 2s)\bar{i} + (3r + s)\bar{j} + (4r - 2s)\bar{k}\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\overline{PA} &= \overline{PO} + \overline{OA} = -\overline{OP} + \overline{OA}\\ &= -\left[(r + 2s)\bar{i} + (3r + s)\bar{j} + (4r - 2s)\bar{k}\right] + 3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}\\ &= (3 - r - 2s)\bar{i} + (-2 - 3r - s)\bar{j} + (-1 - 4r + 2s)\bar{k}\end{aligned}$$

Vektori $\overline{PA}$ on kohtisuorassa kaikkia tason OBC vektoreita vastaan, erityisesti vektoreita $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$ vastaan, joten

$$\begin{cases}\overline{OB} \cdot \overline{PA} = 0\\ \overline{OC} \cdot \overline{PA} = 0\end{cases} \quad \text{eli}$$

$$\begin{cases}1\cdot(3-r-2s) + 3\cdot(-2-3r-s) + 4\cdot(-1-4r+2s) = 0\\ 2\cdot(3-r-2s) + 1\cdot(-2-3r-s) - 2\cdot(-1-4r+2s) = 0\end{cases}$$

$$(1)\begin{cases}26r - 3s + 7 = 0 \quad \big| \cdot 1\\ r - 3s + 2 = 0 \quad \big| \cdot (-1)\end{cases}$$

$$+\begin{cases}26r - 3s + 7 = 0\\ -r + 3s - 2 = 0\end{cases}$$

$$25r + 5 = 0$$

$$r = -\frac{1}{5}$$

Kun sijoitetaan $r = -\frac{1}{5}$ yhtälöön (1), saadaan

$$-\frac{1}{5} - 3s + 2 = 0 \text{ eli } 3s = \frac{9}{5} \text{ eli } s = \frac{3}{5}$$

Saadaan $\overline{PA} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$. Pisteen A etäisyys tasosta OBC on siten

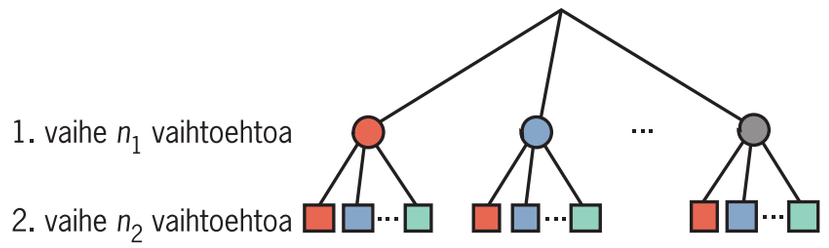
$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

6 Todennäköisyys

6.1 Kombinatoriikkaa

Tuloperiaate

Jos kokonaisuus valitaan k-vaiheisena ja vaiheessa i vaihtoehtoja on n_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$), niin erilaisten kokonaisuuksien lukumäärä on $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

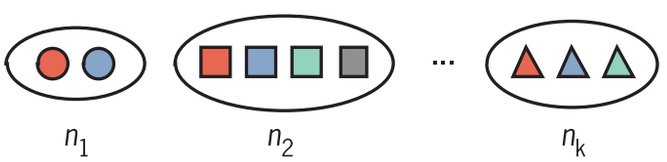


Esimerkki 1 Ravintolan äitienpäivälounas sisältää alkuruoan, pääruoan ja jälkiruoan. Alkuruokavaihtoehtoja on 4, pääruokavaihtoehtoja 5 ja jälkiruokavaihtoehtoja 3. Kuinka monta erilaista lounasta ravintola tarjoaa äitienpäivänä?

Ratkaisu Tuloperiaatteen mukaan erilaisia lounaita on $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$.

Summaperiaate

Olkoot vaihtoehdot ryhmitelty erillisiin tapauksiin niin, että tapauksessa 1 on n_1 vaihtoehtoa, tapauksessa 2 on n_2 vaihtoehtoa, … , tapauksessa k on n_k vaihtoehtoa. Tällöin vaihtoehtoja on kaikkiaan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ kappaletta.



Esimerkki 2

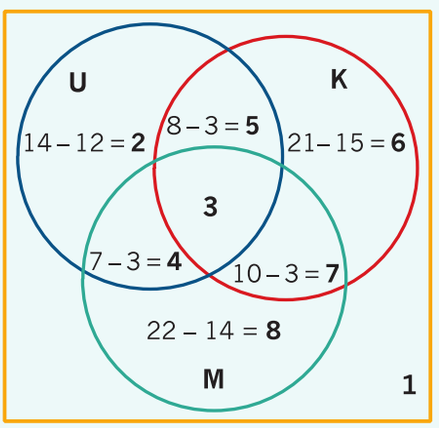
Lehtori A. Ronkaisen abiryhmässä opiskelijoista harrasti

- urheilua 14
- kieliä 21
- matematiikkaa 22
- urheilua ja kieliä 8
- urheilua ja matematiikkaa 7
- kieliä ja matematiikkaa 10
- urheilua, kieliä ja matematiikkaa 3
- ei mitään edellä mainituista 1.

Mikä oli ryhmän koko?

Ratkaisu

Piirretään mallikuva.



Summaperiaatteen mukaan ryhmässä oli opiskelijoita
$1 + 3 + 7 + 4 + 5 + 8 + 6 + 2 = 36$.

Permutaatioiden lukumäärä

$0! = 1$

Olkoon joukossa A n alkiota. Tällöin joukon A permutaatioiden (n-alkioisten jonojen) lukumäärä on $n!$.

Esimerkki 3

Jukolan seitsemän veljestä istuutuvat penkille lukkarin koulussa. Kuinka moneen eri järjestykseen he voivat penkille istuutua?

Ratkaisu

Erilaisia istumajärjestyksiä eli permutaatioita on $7! = 5040$.

Variaatioiden lukumäärä

laskimessa: nPr

Olkoon joukossa A n alkiota. Tällöin joukon A k-variaatioiden (k-alkioisten jonojen) lukumäärä on

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esimerkki 4

Kuinka monella eri tavalla 5 autoa voidaan pysäköidä parkkipaikalle, jossa on 8 vapaata pysäköintiruutua?

Tapa 1

1. auto: 8 valintamahdollisuutta
2. auto: 7 valintamahdollisuutta
3. auto: 6 valintamahdollisuutta
4. auto: 5 valintamahdollisuutta
5. auto: 4 valintamahdollisuutta

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia autojen pysäköintimahdollisuuksia on $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

Tapa 2

Erilaisia 8 pysäköintiruudun 5-variaatioita on

$$(8)_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720$$

$(8)_5$ laskimella: 8 nPr 5

Kombinaatioiden lukumäärä

Olkoon joukossa A n alkiota. Tällöin joukon A k-kombinaatioiden (k-alkioisten osajoukkojen) lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

laskimessa: nCr

Esimerkki 5

Kuinka monella tavalla 30 oppilaan joukosta voidaan valita
a) kaksi edustajaa oppilaskunnan vaaleihin
b) luottamusoppilas ja hänelle varamies?

Ratkaisu

a) Kaksi edustajaa muodostaa 30 henkilön joukosta 2-alkioisen *osajoukon* eli 2-kombinaation (edustajien järjestyksellä ei ole merkitystä). Tällöin valintamahdollisuuksia on

$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{2! \cdot 28!} = 435$$

$\binom{30}{2}$ laskimella: 30 nCr 2

b) Luottamusoppilas ja hänen varamiehensä muodostavat 30 henkilön joukosta 2-alkioisen *jonon* eli 2-variaation (järjestys oleellinen).

Valitaan ensin luottamusoppilas, jolloin vaihtoehtoja on 30. Valitaan sitten varamies, jolloin vaihtoehtoja on 29.

Tuloperiaatteen mukaan kokonaisuuksia on $30 \cdot 29 = 870$.

Esimerkki 6

Viking Lotto -ruudukossa on 48 numeroa, joista veikkaaja valitsee 6. Viking Lotto -arvonnassa arvotaan 6 varsinaista numeroa ja 2 lisänumeroa. Kuinka monta sellaista 6 numeron Viking Loton riviä on olemassa, joissa on täsmälleen 3 varsinaista numeroa ja vähintään 1 lisänumero?

Ratkaisu

Tapaus 3 varsinaista numeroa, 1 lisänumero ja 2 arpomatta jäänyttä numeroa:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{40}{2} = 20 \cdot 2 \cdot 780 = 31\,200$$

Tapaus 3 varsinaista numeroa, 2 lisänumeroa ja 1 arpomatta jäänyt numero:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{40}{1} = 20 \cdot 1 \cdot 40 = 800$$

Tapaukset ovat erilliset, joten summaperiaatteen mukaan vaihtoehtoja on yhteensä $31\,200 + 800 = 32\,000$.

6.2 Todennäköisyys

Tutkitaan arpakuution (nopan) heittoa. **Alkeistapauksia** ovat silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. **Perusjoukko** eli kaikkien alkeistapausten joukko $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Arpakuution heitossa **tapahtuma** on esimerkiksi $A =$ ”nopan silmäluku on pariton” eli $A = \{1, 3, 5\}$. Tapahtuman A **suotuisia alkeistapauksia** ovat siis 1, 3 ja 5. Tapahtumalla on **vastatapahtuma** eli **komplementtitapahtuma**. Tapahtuman A vastatapahtuma on $\overline{A}$ = ”nopan silmäluku ei ole pariton” eli $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$.

Tapahtumat A ja B ovat **erilliset** eli **toisensa poissulkevat,** kun niillä ei ole yhteisiä alkeistapauksia. Tapahtuma A ja sen vastatapahtuma $\overline{A}$ ovat aina erilliset.

Todennäköisyys

- $0 \le P(A) \le 1$, jossa A on tapahtuma.
- $P(E) = 1$, jossa E on varma tapahtuma.
- $P(\varnothing) = 0$, jossa $\varnothing$ on mahdoton tapahtuma.

Alkeistapausten todennäköisyyksiä sanotaan **pistetodennäköisyyksiksi**. Jos kaikkien alkeistapausten todennäköisyydet ovat yhtä suuret, alkeistapaukset ovat **symmetriset**. Jos alkeistapauksia on äärellinen määrä ja ne ovat symmetriset, puhutaan klassisesta todennäköisyydestä.

Klassinen todennäköisyys

Tapahtuman A klassinen todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

jossa $n(A)$ on tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten lukumäärä ja $n(E)$ on kaikkien alkeistapausten lukumäärä.

Tilastollinen todennäköisyys

Tapahtuman A tilastollinen todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{f_A}{n}$$

jossa f_A on tapahtuman A frekvenssi ja n havaintojen lukumäärä.

Geometrinen todennäköisyys

Tapahtuman A geometrinen todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)}$$

jossa $m(A)$ on tapahtuman A ja $m(E)$ perusjoukon E geometrinen mitta.

Esimerkki 1

Purjehtijalla on 24 m pitkä köysi, joka katkeaa satunnaisesta kohdasta poikki. Millä todennäköisyydellä köydenpätkien pituusero on alle 6 m?

Ratkaisu

Piirretään mallikuva.

Geometrisen todennäköisyyden mukaan

$$P(\text{pituusero} < 6\text{ m}) = \frac{6\text{ m}}{24\text{ m}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$$

Esimerkki 2

Sienikurssilla opetettiin tunnistamaan 78 erilaista sientä, joista kurssilainen oppi kuitenkin vain 49. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän tunnisti oikein hänelle satunnaisesti esitetyt viisi erilaista kurssilla opetettua sientä?
[s96, 7c]

Tapa 1

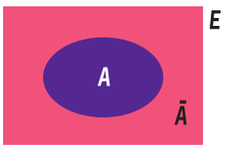
Alkeistapauksia ovat 5 sienen *jonot*. Tällöin klassisen todennäköisyyden mukaan

$$P(5\text{ oikein}) = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75 \cdot 74} = \frac{45\,402}{502\,645} \approx 0{,}090$$

Tapa 2

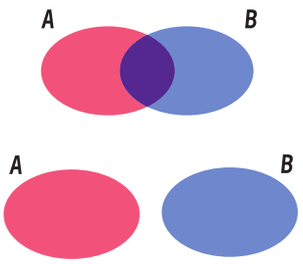
Alkeistapauksia ovat 5 sienen *joukot*. Tällöin klassisen todennäköisyyden mukaan

$$P(5 \text{ oikein}) = \frac{\binom{49}{5}}{\binom{78}{5}} = \frac{1\,906\,884}{21\,111\,090} = \frac{45\,402}{502\,645} \approx 0{,}090$$



Komplementtisääntö

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$



Yhteenlaskusääntö

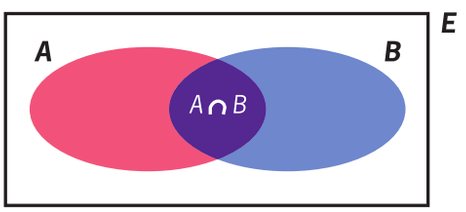
$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$, jos A ja B ovat erilliset

Ehdollinen todennäköisyys

Olkoon $P(B) > 0$. Tapahtuman A todennäköisyys ehdolla, että B tapahtuu, on

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ ja } B)}{P(B)}$$



Kertolaskusääntö

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$, jos A ja B riippumattomat

Esimerkki 3

Tuhannen umpimähkään valitun suomalaisen veriryhmäjakauma oli seuraava: A 440, B 170, AB 80 ja O 310. Millä todennäköisyydellä sattumanvaraisesti valitun suomalaisen veriryhmä on A tai AB?

Ratkaisu

$$P(A \text{ tai } AB) \quad \big| \text{ tapahtumat erilliset}$$

$$= P(A) + P(AB) \quad \big| \text{ tilastollinen todennäköisyys}$$

$$= \frac{440}{1000} + \frac{80}{1000} = \frac{13}{25} = 0{,}52$$

Esimerkki 4 Mikä on todennäköisyys, että neljää noppaa heitettäessä saadaan vähintään kaksi yhtä suurta silmälukua? [s88, 6a]

Ratkaisu

$P(\text{vähintään kaksi yhtä suurta silmälukua})$ | komplementtisääntö

$= 1 - P(\text{kaikki silmäluvut eri suuria})$ | kertolaskusääntö

$= 1 - P(\text{ensimmäinen mikä vaan}) \cdot P(\text{toinen eri kuin edellinen}) \cdot P(\text{kolmas eri kuin edelliset}) \cdot P(\text{neljäs eri kuin edelliset})$

$= 1 - \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6}$

$= 1 - \frac{5}{18}$

$= \frac{13}{18} \approx 0{,}72$

Esimerkki 5 Hatussa on lappuja, joihin on kuhunkin kirjoitettu yksi kirjain. Kirjaimet ovat Y, L, I, O, P, P, I, L, A, S, K, I, R, J, O, I, T, U ja S. Hatusta nostetaan yksitellen umpimähkään viisi lappua. Millä todennäköisyydellä nostoista muodostuu nostojärjestyksessä kirjainjono OPTIO? Tutki erikseen tapaus, jossa nostettu kortti palautetaan kunkin noston jälkeen takaisin hattuun ja tapaus, jossa nostettua korttia ei palauteta takaisin hattuun.

Ratkaisu **1** Kortti palautetaan noston jälkeen takaisin.

$P(\text{OPTIO})$ | kertolaskusääntö

$= P(\text{O}____) \cdot P(_\text{P}___) \cdot P(__\text{T}__) \cdot P(___\text{I}_) \cdot P(____\text{O})$

$= \frac{2}{19} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{2}{19}$

$= \frac{32}{2\,476\,099} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-5}$

2 Korttia ei palauteta noston jälkeen takaisin.

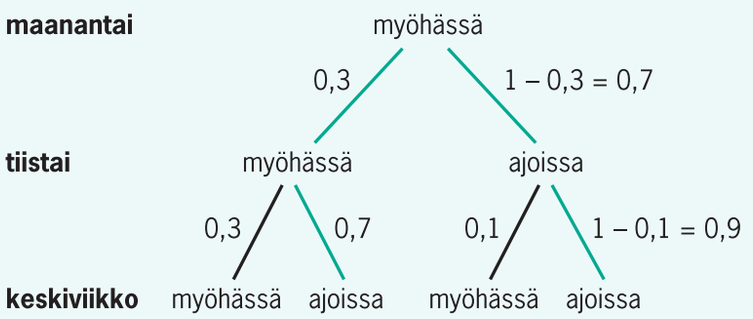
$$
\begin{aligned}
&P(\text{OPTIO}) && \text{kertolaskusääntö}\\
&= P(\text{O}____) \cdot\\
&\quad P(_\text{P}___ \mid \text{O}____) \cdot\\
&\quad P(__\text{T}__ \mid \text{O P}___) \cdot\\
&\quad P(___\text{I}_ \mid \text{O P T}__) \cdot\\
&\quad P(____\text{O} \mid \text{O P T I}_)\\
&= \frac{2}{19} \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{1}{15}\\
&= \frac{1}{87\,210} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 6

Koulusta myöhästynyt oppilas myöhästyy seuraavanakin koulupäivänä 30 prosentin todennäköisyydellä. Jos oppilas on tullut ajoissa kouluun, hän myöhästyy seuraavana koulupäivänä 10 prosentin todennäköisyydellä. Kuinka suuri on todennäköisyys, että oppilas tulee keskiviikkona ajoissa kouluun, jos hän saman viikon maanantaina myöhästyi koulusta? [k92, 7b]

Ratkaisu

Piirretään tilanteesta puumalli.



$$
\begin{aligned}
&P(\text{keskiviikkona ajoissa} \mid \text{maanantaina myöhässä})\\
&= 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}9\\
&= 0{,}84
\end{aligned}
$$

Vastaus 0,84

Esimerkki 7

Tietyllä alueella 15 %:lla väestöstä on kohonnut verenpaine. Kuinka monta alueen asukasta vähintään on tutkittava, jotta löydetään yli 95 %:n todennäköisyydellä ainakin yksi henkilö, jolla on kohonnut verenpaine?

Ratkaisu

Merkitään A = ”henkilöllä on kohonnut verenpaine”, jolloin $\overline{A}$ = ”henkilöllä ei ole kohonnutta verenpainetta”. Olkoon n tutkittavien henkilöiden määrä.

Tällöin $P(A) = 0{,}15$ ja $P(\overline{A}) = 0{,}85$.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{ainakin yhdellä henkilöllä kohonnut verenpaine}) \\
&= 1 - P(\text{ei kenelläkään kohonnutta verenpainetta}) \\
&= 1 - P(\underbrace{\overline{A} \text{ ja } \overline{A} \text{ ja } \ldots \text{ ja } \overline{A}}_{n \text{ kpl}}) \\
&= 1 - \underbrace{0{,}85 \cdot 0{,}85 \cdot \ldots \cdot 0{,}85}_{n \text{ kpl}} \\
&= 1 - 0{,}85^n
\end{aligned}
$$

Saadaan epäyhtälö

$$
\begin{aligned}
1 - 0{,}85^n &> 0{,}95 \\
\underbrace{0{,}85^n}_{>0} &< \underbrace{0{,}05}_{>0} && \left| \begin{array}{l}\text{Funktio lg on aidosti}\\ \text{kasvava, joten}\\ \text{suuruusjärjestys}\\ \text{säilyy.}\end{array}\right. \\
\lg 0{,}85^n &< \lg 0{,}05 && \left| \log_a x^r = r \log_a x \right. \\
n \lg 0{,}85 &< \lg 0{,}05 && \left| : \lg 0{,}85 \ \ (< 0) \right. \\
n &> \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}85} \\
n &> 18{,}433\ldots && \left| n \in \mathbb{N} \right. \\
n &= 19, 20, 21, \ldots
\end{aligned}
$$

Vastaus

Vähintään 19 asukasta pitää tutkia.

Esimerkki 8 Kolminumeroisten positiivisten kokonaislukujen joukosta valitaan umpimähkään yksi luku. Millä todennäköisyydellä tämä on jaollinen kolmella tai viidellä? [S77, 6a]

Ratkaisu Kolminumeroisia positiivisia kokonaislukuja 100, 101, …, 998, 999 on yhteensä $999 - 99 = 900$.

Näistä ovat

- kolmella jaollisia $\underbrace{102}_{34 \cdot 3}, \underbrace{105}_{35 \cdot 3}, \ldots, \underbrace{996}_{332 \cdot 3}, \underbrace{999}_{333 \cdot 3}$,

  joita on yhteensä $333 - 33 = 300$

- viidellä jaollisia $\underbrace{100}_{20 \cdot 5}, \underbrace{105}_{21 \cdot 5}, \ldots, \underbrace{990}_{198 \cdot 5}, \underbrace{995}_{199 \cdot 5}$,

  joita on yhteensä $199 - 19 = 180$

- viidellätoista jaollisia $\underbrace{105}_{7 \cdot 15}, \underbrace{120}_{8 \cdot 15}, \ldots, \underbrace{975}_{65 \cdot 15}, \underbrace{990}_{66 \cdot 15}$,

  joita on yhteensä $66 - 6 = 60$.

Saadaan

$P(\text{kolmella tai viidellä})$ | yhteenlaskusääntö

$= P(\text{kolmella}) + P(\text{viidellä}) - P(\text{kolmella ja viidellä})$

$= P(\text{kolmella}) + P(\text{viidellä}) - P(\text{viidellätoista})$

$$= \frac{300}{900} + \frac{180}{900} - \frac{60}{900}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15}$$

$$= \frac{5 + 3 - 1}{15}$$

$$= \frac{7}{15} \approx 0{,}47$$

Esimerkki 9

Pelaaja ottaa korttipakasta kolme korttia. Millä todennäköisyydellä kolmas kortti on hertta, kun ensimmäinen on pata ja toinen hertta?

Ratkaisu

$$P(\text{3. hertta} \mid \text{1. pata ja 2. hertta})$$ | ehdollinen todennäköisyys

$$= \frac{P(\text{”3. hertta” ja ”1. pata ja 2. hertta”})}{P(\text{1. pata ja 2. hertta})}$$

$$= \frac{P(\text{1. pata ja 2. hertta ja 3. hertta})}{P(\text{1. pata ja 2. hertta})}$$ | kertolaskusääntö

$$= \frac{\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50}}{\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51}} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

Binomitodennäköisyys

Tutkitaan tuloksen A esiintymistä toistokokeessa. Olkoon n toistojen määrä, p tuloksen A todennäköisyys kullakin toistolla ja $q = 1 - p$ tuloksen A vastatapahtuman todennäköisyys. Tällöin

$$P(\text{tulos } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Tätä kutsutaan **binomitodennäköisyydeksi**.

Esimerkki 10

Todennäköisyys sille, että koripallossa vapaaheitto onnistuu, arvioidaan 80 %:ksi. Laske todennäköisyys sille, että 5:stä heitosta vähintään kolme onnistuu. Vapaaheittojen onnistumiset eri heittokerroilla ovat toisistaan riippumattomia.

Ratkaisu

$P(\text{vähintään kolme onnistuu})$

$= P(\text{3 tai 4 tai 5 onnistuu})$ | yhteenlaskusääntö

$= P(3) + P(4) + P(5)$ | binomitodennäköisyys

$$= \binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot 0{,}8^5 \cdot 1$$

$\approx 0{,}94$

6.3 Jakauma

- **Satunnaismuuttuja** X: $E \to \mathbb{R}$ on funktio perusjoukosta E reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$ eli satunnaismuuttuja X liittää jokaiseen alkeistapaukseen reaaliluvun.

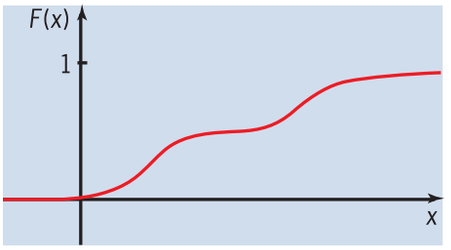
- Satunnaismuuttujan X jakauman muodostavat satunnaismuuttujan saamat arvot ja niiden pistetodennäköisyydet. Jakauma sisältää siis tiedon siitä, millä todennäköisyydellä X saa yksittäisiä lukuarvoja, eli jakauma sisältää tiedon pistetodennäköisyysfunktiosta

$$p : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad p(x) = P(X = x)$$

- Kertymäfunktio kertoo, millä todennäköisyydellä satunnaismuuttujan X arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin x, eli kertymäfunktio on

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad F(x) = P(X \leq x)$$

Kertymäfunktio on ei-negatiivinen ja kasvava funktio, jonka arvojoukko sisältyy suljettuun väliin $[0, 1]$.



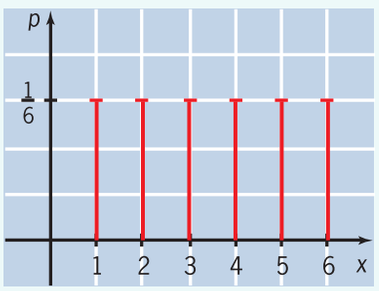
Esimerkki 1

Noppaa heitetään kerran. Olkoon satunnaismuuttuja X nopan silmäluku.

a) Muodosta satunnaismuuttujan jakauma ja havainnollista jakaumaa janadiagrammilla.
b) Määritä satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio.
c) Määritä satunnaismuuttujan kertymäfunktio ja piirrä sen kuvaaja.

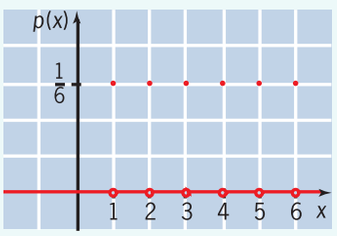
Ratkaisu Satunnaismuuttujan X eli silmäluvun mahdolliset arvot ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

a) Esitetään satunnaismuuttujan arvoja vastaavat pistetodennäköisyydet eli satunnaismuuttujan jakauma taulukkomuodossa ja janan diagrammina.



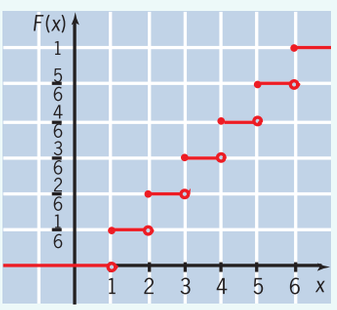
x	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) Pistetodennäköisyysfunktio on



$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{kun } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

c) Kertymäfunktio on



$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, & \text{kun } 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, & \text{kun } 2 \le x < 3 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, & \text{kun } 3 \le x < 4 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, & \text{kun } 4 \le x < 5 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, & \text{kun } 5 \le x < 6 \\ \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1, & \text{kun } x \ge 6 \end{cases}$$

DISKREETTI JAKAUMA

Satunnaismuuttujan X jakauma on **diskreetti**, kun pistetodennäköisyyksien summa on 1. Tällöin satunnaismuuttuja X saa vain yksittäisiä arvoja.

Diskreetin satunnaismuuttujan X odotusarvo

$$\mu = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

jossa p_i on satunnaismuuttujan arvoa x_i vastaava todennäköisyys.

Odotusarvoa merkitään myös $E(X)$.

Odotusarvo kuvaa satunnaismuuttujan arvojen keskiarvoa, kun satunnaiskoetta toistetaan monta kertaa.

Diskreetin satunnaismuuttujan X varianssi ja keskihajonta

Varianssi on

$$\sigma^2 = p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2$$

Keskihajonta on $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Varianssia merkitään myös $D^2(X)$ ja keskihajontaa $D(X)$.

Binomijakauma

Satunnaismuuttuja X, joka saa arvoja k ($k = 0, 1, \ldots, n$), on binomijakautunut, kun

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Tällöin merkitään $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

- odotusarvo $\mu = np$
- varianssi $\sigma^2 = npq$
- keskihajonta $\sigma = \sqrt{npq}$

Esimerkki 2

Edellisen esimerkin (s. 127) diskreetin satunnaismuuttujan (nopan silmäluvun)

x	p
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

- odotusarvo on

$$\mu = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6$$

$$= 3\frac{1}{2}$$

- varianssi on

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{6} p_i (x_i - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 - 3\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(2 - 3\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(3 - 3\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \left(4 - 3\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(5 - 3\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(6 - 3\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}\right) = \frac{35}{12} \approx 2{,}9$$

- keskihajonta on

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{6} p_i (x_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{35}{12}} = \overset{\sqrt{3})}{} \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{105}}{6} \approx 1{,}7$$

Esimerkki 3

Noppaa heitetään 50 kertaa. Olkoon satunnaismuuttuja X nopan silmäluvun 2 esiintymiskertojen lukumäärä. Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.

Ratkaisu

Kyseessä on toistokoe, jossa satunnaismuuttuja noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}\left(50, \frac{1}{6}\right)$.

Odotusarvo on $\mu = np = 50 \cdot \frac{1}{6} = 8\frac{1}{3}$.

Keskihajonta on $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5\sqrt{10}}{6} \approx 2{,}6$.

JATKUVA JAKAUMA

Määritelmä

Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tiheysfunktio, kun

(1) funktio on ei-negatiivinen koko $\mathbb{R}$:ssä eli $f(x) \geq 0$ kaikilla arvoilla $x \in \mathbb{R}$

(2) funktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1.

Esimerkki 4

Erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{cx}{x^2 - 6}, & -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritä vakio c.

Ratkaisu

Tiheysfunktio on ei-negatiivinen, joten pitää olla $\dfrac{cx}{x^2 - 6} \geq 0$ kaikilla $-2 \leq x \leq 0$. Koska kaikilla $-2 \leq x \leq 0$ on $x^2 - 6 < 0$ ja $x \leq 0$, niin $\dfrac{x}{x^2 - 6} \geq 0$, joten pitää olla $c \geq 0$.

Tiheysfunktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen ala on 1. Saadaan yhtälö

$$\int_{-2}^{0} \frac{cx}{x^2 - 6}\,dx = 1$$

$$\frac{c}{2}\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2 - 6} \cdot 2x\,dx = 1 \qquad \left| \begin{array}{l} s(x) = x^2 - 6 \text{ ja } u(x) = \dfrac{1}{x} \\ s'(x) = 2x \quad \text{ja } U(x) = \ln|x| \\ \int u(s(x)) \cdot s'(x)\,dx = U(s(x)) + C \end{array} \right.$$

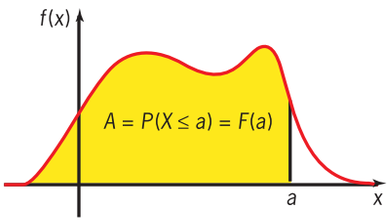
$$\frac{c}{2}\Big/_{-2}^{0} \ln|x^2 - 6| = 1$$

$$\frac{c}{2}(\ln 6 - \ln 2) = 1 \qquad \left| \log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \right.$$

$$c \ln\frac{6}{2} = 2$$

$$c = \frac{2}{\ln 3} \qquad \left| c \geq 0 \right.$$

kelpaa



Määritelmä

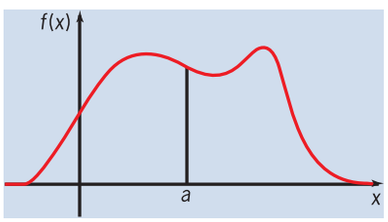
Funktion f sanotaan olevan **satunnaismuuttujan X tiheysfunktio,** kun jokaisella $a \in \mathbb{R}$ todennäköisyys $P(X \le a)$ saadaan laskemalla funktion f kuvaajan, x-akselin ja pystysuoran suoran $x = a$ vasemmalle rajaaman alueen ala.

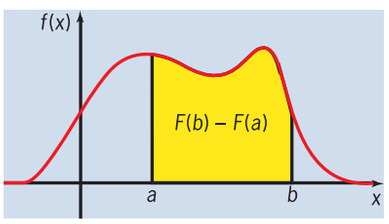
Tällöin satunnaismuuttujan X sanotaan olevan **jatkuvasti jakautunut** ja funktiota

$$F(a) = P(X \le a), \quad a \in \mathbb{R}$$

kutsutaan **satunnaismuuttujan kertymäfunktioksi.**

Huomautuksia





- Jatkuvan satunnaismuuttujan yksittäisen arvon todennäköisyys on nolla, koska

$$P(X = a) = P(a \le x \le a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

- Todennäköisyys, että jatkuva satunnaismuuttuja X saa arvoja välillä $[a, b]$, on yhtä suuri kuin tiheysfunktion kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala (**todennäköisyysmassa**) kyseisellä välillä eli

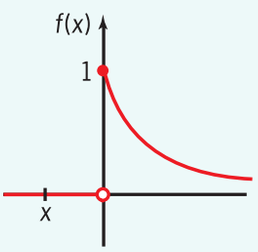
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

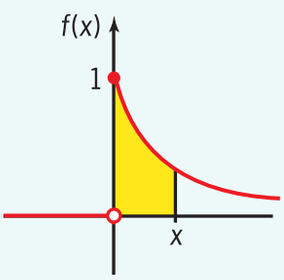
Esimerkki 5

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{kun } x \ge 0. \end{cases}$

a) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio.
b) Määritä todennäköisyys $P(1 < X < 2)$.

Ratkaisu





a) • Kun $x < 0$, niin $f(x) = 0$, joten

$$F(x) = P(X \le x) = 0$$

• Kun $x \ge 0$, niin

$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}\,dt = -\int_0^x \underbrace{e^{-t}}_{u(s(t))} \cdot \underbrace{(-1)}_{s'(t)}\,dt$$

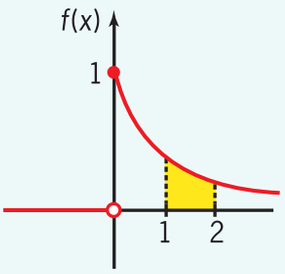
$$= -\int_0^x e^{-t} = -(e^{-x} - e^0) = -(e^{-x} - 1) = 1 - e^{-x}$$

Siis $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0. \end{cases}$

b) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1})$

$= 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} = -\frac{1}{e^2} + \overset{e)}{\frac{1}{e}} = \frac{-1+e}{e^2}$

$= \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}63$



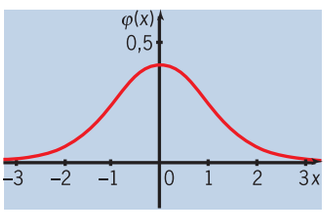
Toinen tapa

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 e^{-x}\,dx$$

$$= -\int_1^2 \underbrace{e^{-x}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{(-1)}_{s'(x)}\,dx = -\Big/_1^2 e^{-x} = -(e^{-2} - e^{-1})$$

$$= -e^{-2} + e^{-1} = -\frac{1}{e^2} + \overset{e)}{\frac{1}{e}} = \frac{-1+e}{e^2} = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}63$$

NORMITETTU NORMAALIJAKAUMA

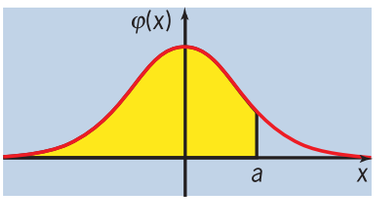


Jos satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

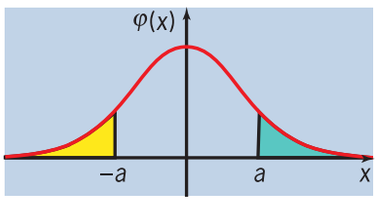
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, niin X noudattaa normitettua normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on $\mu = 0$ ja keskihajonta $\sigma = 1$. Tätä merkitään $X \sim N(0, 1)$.

Normitetun normaalijakauman kertymäfunktion $\Phi(x) = P(X \le x)$ arvoja on taulukoitu.

Todennäköisyyksiä voidaan laskea kertymäfunktion Φ avulla seuraavasti:



$P(X < a) = P(X \le a) = \Phi(a)$
$P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - \Phi(a)$

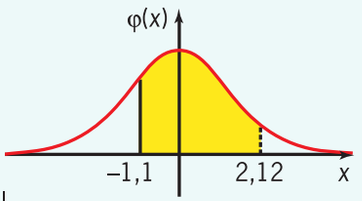


$P(X \le -a) = P(X \ge a) = 1 - P(X < a)$
$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

Esimerkki 6 Satunnaismuuttuja $X \sim N(0,1)$. Määritä $P(-1{,}1 \le X < 2{,}12)$.

Ratkaisu

$$\begin{aligned} &P(-1{,}1 \le X < 2{,}12) \\ &= \Phi(2{,}12) - \Phi(-1{,}1) \\ &= \Phi(2{,}12) - [1 - \Phi(1{,}1)] \\ &= \Phi(2{,}12) - 1 + \Phi(1{,}1) \\ &\approx 0{,}9830 - 1 + 0{,}8643 = 0{,}8473 \end{aligned}$$



taulukkokirja

YLEINEN NORMAALIJAKAUMA

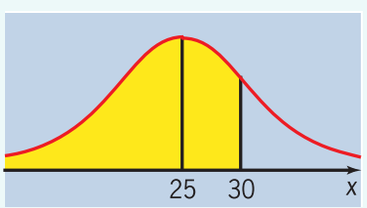
Yleisessä normaalijakaumassa odotusarvo voi olla nollasta poikkeava ja keskihajonta ykkösestä poikkeava. Koska kertymäfunktion arvot on taulukoitu vain normitetun jakauman tapauksessa, pitää ennen kertymäfunktion arvon laskemista muuttujan arvo x **normittaa**. Satunnaismuuttujaa X vastaava normitettu satunnaismuuttuja Z saadaan kaavasta

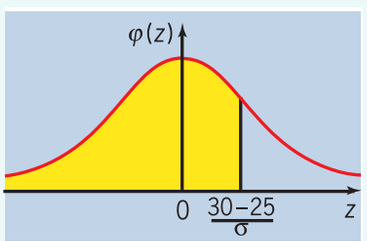
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

jossa μ ja σ ovat satunnaismuuttujan X normaalijakauman odotusarvo ja keskihajonta. Tällöin voidaan merkitä $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tai $X \sim N(\mu, \sigma)$, jolloin $Z \sim N(0,1)$.

Esimerkki 7 Työhönottohaastattelu kestää keskimäärin 25 minuuttia. Oletetaan, että sen pituus on normaalisti jakautunut $N(25, \sigma)$. Mikä on keskihajonnan σ oltava, että haastattelu ei 95 prosentin varmuudella ylitä 30 minuuttia? [s99, 7a]

Ratkaisu Olkoon satunnaismuuttuja X haastatteluaika minuutteina, jolloin $X \sim N(25, \sigma)$. Saadaan yhtälö





$$\begin{aligned} P(X \le 30) &= 0{,}95 && \text{normitus} \\ P\left(Z \le \frac{30-25}{\sigma}\right) &= 0{,}95 \\ \Phi\left(\frac{30-25}{\sigma}\right) &= 0{,}95 && \text{taulukkokirjasta } \Phi(1{,}6449) \approx 0{,}95 \\ \frac{30-25}{\sigma} &\approx 1{,}6449 \\ 1{,}6449\sigma &\approx 5 \\ \sigma &\approx \frac{5}{1{,}6449} \\ \sigma &\approx 3{,}0 \text{ (min)} \end{aligned}$$

Esimerkki 8

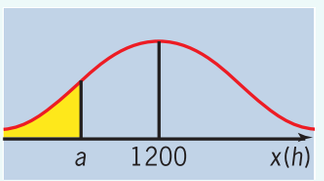
Koulussa on 300 lamppua, joiden kestoikä noudattaa normaalijakaumaa keskiarvon ollessa 1200 h ja keskihajonnan 200 h. Lamput palavat 55 h viikossa. Kaikki lamput vaihdetaan kerralla. Kuinka usein tämä on tehtävä, jotta vain 50 lamppua ehtii sammua? [k93, 10]

Ratkaisu

Lamppujen paloaika $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, jossa $\mu = 1200$ h ja $\sigma = 200$ h.

Vain 50 lamppua 300 lampusta eli $\frac{50}{300} = \frac{1}{6}$ lampuista saa sammua ennen lamppujen vaihtoa. Olkoon lamppujen paloaika ennen vaihtoa a tuntia.

Tällöin

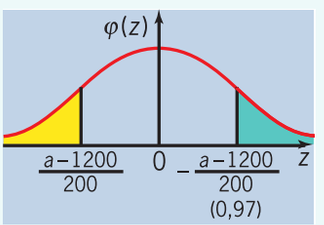


$$P(X \le a) = \frac{1}{6}$$

$$P\left(Z \le \frac{a-1200}{200}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\Phi\left(\frac{a-1200}{200}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\Phi\left(-\frac{a-1200}{200}\right) = 1 - \frac{1}{6}$$



$$\Phi\left(\frac{1200-a}{200}\right) \approx 0{,}8333$$

taulukkokirjasta:
$\Phi(0{,}97) \approx 0{,}8340$

$$\frac{1200-a}{200} \approx 0{,}97$$

$$1200 - a \approx 194$$

$$a \approx 1006$$

Koska lamput palavat 55 h viikossa, niin lamppujen vaihtoväli viikkoina on $\frac{1006\,\mathrm{h}}{55\,\mathrm{h}} = 18{,}290\ldots \approx 18$.

Vastaus

Lamput tulee vaihtaa 18 viikon välein.

BINOMIJAKAUMAN JA NORMAALIJAKAUMAN YHTEYS

Binomijakauman tapauksessa todennäköisyyksien laskeminen voi joskus olla työlästä. Tällöin voidaan käyttää apuna seuraavaa ominaisuutta, joka yhdistää binomi- ja normaalijakauman toisiinsa.

Jos satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ja toistojen määrä n on suuri, niin X on likimain $\text{N}(\mu, \sigma^2)$, jossa $\mu = np$ ja $\sigma^2 = npq$ sekä $q = 1 - p$. Arvio on sitä tarkempi, mitä suurempi on toistojen määrä n.

Esimerkki 9

Vuonna 2006 Suomessa syntyi 59 000 lasta. Teollistuneissa maissa, kuten Suomessa, syntyvä lapsi on poika 51,1 %:n todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä vuonna 2007 syntyy yli 29 000 tyttöä? Oletetaan, että syntyvyys ei muutu ja että lasten sukupuolet ovat toisistaan riippumattomia.

Ratkaisu

Olkoon X syntyvien tyttöjen lukumäärä. Kyseessä on binomijakaumaa noudattava toistokoe, jossa

$$n = 59\,000$$
$$p = 1 - 0{,}511 = 0{,}489$$
$$q = 0{,}511$$

Siis $X \sim \text{Bin}(n, p) = \text{Bin}(59\,000;\ 0{,}489)$.

Approksimoidaan kyseistä binomijakaumaa normaalijakaumalla $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$.

Tällöin

- odotusarvo on

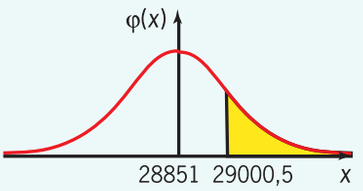
$$\mu = np = 59\,000 \cdot 0{,}489 = 28\,851$$

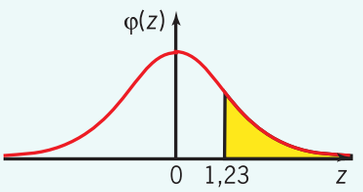
- keskihajonta on

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{59\,000 \cdot 0{,}489 \cdot 0{,}511} \approx 121{,}420$$

Näin ollen

$$
\begin{aligned}
&P(\text{tyttöjä vähintään } 29\,000{,}5) \\
&= P(X \geq 29\,000{,}5) \qquad \left| \; Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \right. \\
&= P\left(Z \geq \frac{29\,000{,}5 - 28\,851}{121{,}420}\right) \\
&\approx P(Z \geq 1{,}23) \\
&= 1 - \Phi(1{,}23) \\
&\approx 1 - 0{,}8907 \\
&= 0{,}1093 \\
&\approx 11\ \%
\end{aligned}
$$





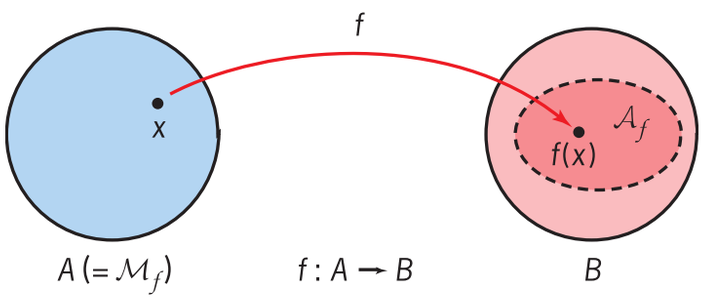
Vastaus Tyttöjä syntyy yli 29 000 11 %:n todennäköisyydellä.

7 Differentiaalilaskenta

7.1 Funktio

Funktion määritelmä

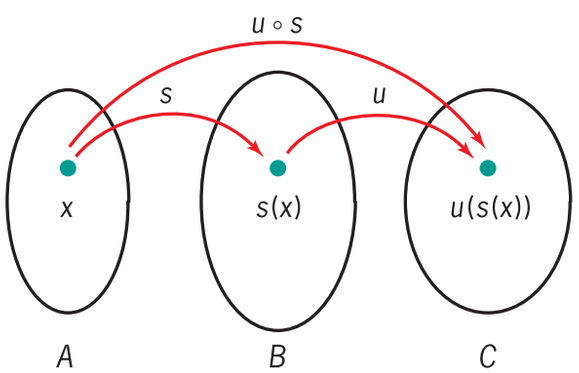
Funktio eli **kuvaus** f joukosta A joukkoon B on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon $\mathcal{M}_f = A$ alkioon täsmälleen yhden maalijoukon B alkion.



Yhdistetty funktio

Olkoot funktiot $s : A \to B$ ja $u : B \to C$. Funktioiden s ja u yhdistetty funktio $u \circ s$ on joukossa A määritelty funktio

$$(u \circ s)(x) = u\big(s(x)\big)$$



Esimerkki 1

Olkoon $f(x) = 2x - 3$ ja $g(x) = x^2 - 1$.
a) Muodosta funktio $f \circ g$.
b) Ratkaise yhtälö $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(1)$.

Ratkaisu

a) Yhdistetyn funktion määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= 2(x^2 - 1) - 3 \\ &= 2x^2 - 5\end{aligned}$$

b) Yhdistetyn funktion määritelmän mukaan

$$(g \circ f)(1) = g\big(f(1)\big) = g(2 \cdot 1 - 3) = g(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

Ratkaistaan annettu yhtälö:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(1) \qquad \left| \begin{array}{l}(f \circ g)(x) = 2x^2 - 5 \\ (g \circ f)(1) = 0\end{array} \right.$$

$$2x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = \frac{5}{2}$$

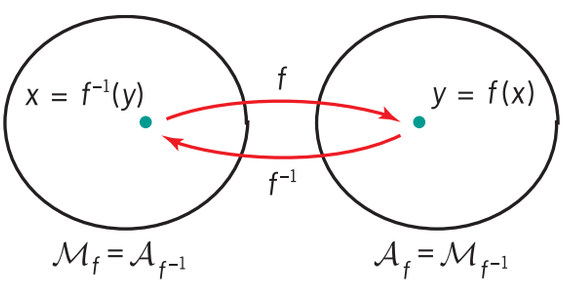
$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$x = \pm^{\sqrt{2})}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Käänteisfunktio

Funktiot $f : A \to B$ ja $f^{-1} : B \to A$ ovat toistensa käänteisfunktioita, kun kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$ funktio f kuvaa luvun x luvuksi y täsmälleen silloin, kun funktio f^{-1} kuvaa luvun y luvuksi x.



Lause

Jos funktio on aidosti kasvava (vähenevä), niin sillä on käänteisfunktio, joka on aidosti kasvava (vähenevä).

Esimerkki 2

Osoita, että funktiolla $f\colon [2, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 8$ on käänteisfunktio, ja määritä se.

Ratkaisu

Todistus. Osoitetaan, että käänteisfunktio f^{-1} on olemassa, määrittämällä käänteisfunktio.

- Funktion f määrittelyjoukko on $\mathcal{M}_f = [2, 10]$.
  Määritetään aluksi funktion f arvojoukko eli käänteisfunktion määrittelyjoukko.

  Kun x kasvaa arvosta 2 arvoon 10, niin $x^3 - 8$ kasvaa arvosta $2^3 - 8 = 0$ arvoon $10^3 - 8 = 992$. Tällöin funktion f arvojoukko on $\mathcal{A}_f = [0, 992]$. Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on siis $\mathcal{M}_{f^{-1}} = \mathcal{A}_f = [0, 992]$.

- Käänteisfunktion lauseke saadaan ratkaisemalla yhtälö $y = f(x)$, $2 \le x \le 10$, muuttujan x suhteen.

$$y = x^3 - 8$$
$$x^3 = y + 8$$
$$x = \sqrt[3]{y + 8} \qquad \left| \begin{array}{l} 2 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 992 \end{array} \right.$$

  Yhtälöllä $y = f(x)$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = \sqrt[3]{y + 8}$ kaikilla $0 \le y \le 992$. Funktiolla f on siis käänteisfunktio, joka on

$$f^{-1}\colon [0, 992] \to [2, 10],\ f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y + 8}$$ □

  Jos käänteisfunktiossa merkitään muuttujaa tavalliseen tapaan kirjaimella x, niin käänteisfunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$f^{-1}\colon [0, 992] \to [2, 10],\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 8}$$

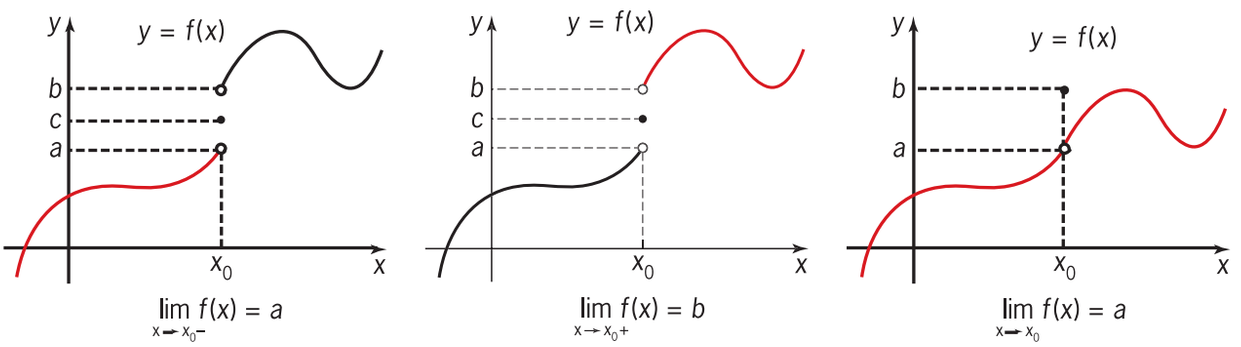
7.2 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

RAJA-ARVO

- Jos funktion f **vasemmanpuolinen raja-arvo** kohdassa x_0 on a, niin merkitään $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$.
- Jos funktion f **oikeanpuolinen raja-arvo** kohdassa x_0 on b, niin merkitään $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = b$.

  Vasemman- ja oikeanpuolisia raja-arvoja sanotaan **toispuolisiksi raja-arvoiksi**.
- Jos funktion f **raja-arvo** kohdassa x_0 on a, niin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$



Raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = a \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = a$$

- Jos osoittajan raja-arvo kohdassa x_0 ei ole nolla, mutta sitä vastoin nimittäjän raja-arvo kohdassa x_0 on nolla, niin osamäärän raja-arvoa kohdassa x_0 ei ole olemassa. Tämä voidaan esittää seuraavana lauseena.

Raja-arvon olemassaolo

Jos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$ ja $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, niin raja-arvoa $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ei ole olemassa.

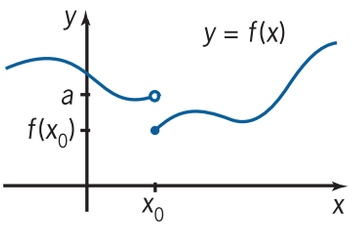
Toispuolinen jatkuvuus kohdassa x_0

Funktio f on **vasemmalta jatkuva kohdassa x_0,** kun

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$$

Funktio f on **oikealta jatkuva kohdassa x_0,** kun

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$



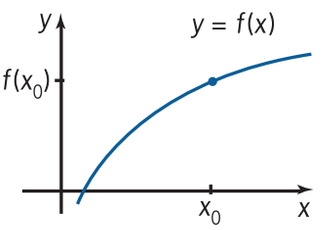
Funktio f on oikealta jatkuva kohdassa x_0.

Jatkuvuus kohdassa x_0

Funktio f on **jatkuva kohdassa x_0,** kun

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ eli kun}$$

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$



Huomautuksia

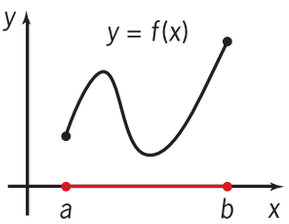
- Tieto funktion f jatkuvuudesta kohdassa x_0 on samalla tieto fuktion raja-arvosta kohdassa x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

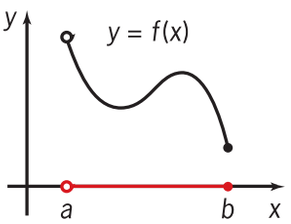
- Jos funktio f ei ole määritelty kohdassa x_0, niin ennen raja-arvon $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tutkimista funktion lauseketta voidaan yrittää muokata.

Jatkuvuus välillä

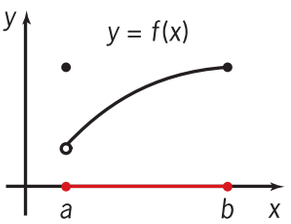
Funktio f on **jatkuva välillä I,** kun se on jatkuva jokaisessa välin sisäpisteessä ja toispuolisesti jatkuva mahdollisissa välin päätepisteissä.



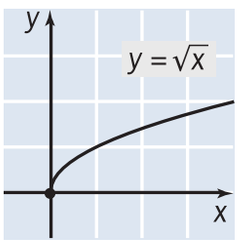
f jatkuva välillä $[a, b]$



f jatkuva välillä $]a, b]$



f epäjatkuva välillä $[a, b]$



$f(x) = \sqrt{x}$ jatkuva välillä $[0, \infty[$

Jatkuvuus joukossa

Funktio f on **jatkuva joukossa A,** kun se on jatkuva joukon A jokaisessa pisteessä.

Määrittelyjoukossaan jatkuvia funktioita

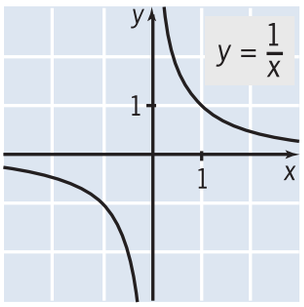
- polynomifunktio $P(x)$
- rationaalifunktio $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, jossa P ja Q ovat polynomifunktioita
- trigonometriset funktiot $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$
- juurifunktio $\sqrt[n]{x}$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
- potenssifunktio x^r
- eksponenttifunktio a^x, $a > 0$ ja $a \neq 1$
- logaritmifunktio $\log_a x$, $a > 0$ ja $a \neq 1$

Jatkuvuuden tutkimisessa voidaan käyttää apuna seuraavaa lausetta:

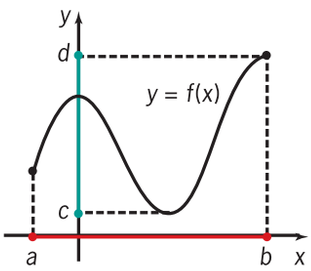
Lause

Olkoot funktiot f ja g jatkuvia, ja olkoon c vakio.

Tällöin funktiot cf, $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$ ja $f \circ g$ ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.



Esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on rationaalifunktiona jatkuva määrittelyjoukossaan eli kun $x \neq 0$. Funktion f kuvaaja ei ole yhtenäinen, vaikka f on jatkuva. Tämä on mahdollista, koska funktion määrittelyjoukko ei ole väli vaan koostuu kahdesta erillisestä välistä.



Lause

Suljetulla välillä jatkuva funktio saa tällä välillä pienimmän ja suurimman arvon ja kaikki arvot niiden väliltä.

Esimerkki 1

Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3a, & x < 1 \\ 2x + 5a, & x \geq 1 \end{cases}$ on jatkuva?

Kun tutkitaan funktion jatkuvuutta, on tarkasteltava jatkuvuutta koko määrittelyjoukossa.

- Kun $x < 1$, niin $f(x) = x^2 + 3a$, joten tällöin f on polynomifunktiona jatkuva.
- Kun $x > 1$, niin $f(x) = 2x + 5a$, joten tällöin f on polynomifunktiona jatkuva.
- Kun $x = 1$, niin tutkitaan toispuoliset raja-arvot ja funktion arvo tässä kohdassa:

1. $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} (x^2 + 3a) = 1 + 3a$
2. $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (2x + 5a) = 2 + 5a$
3. $f(1) = 2 \cdot 1 + 5a = 2 + 5a$

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$ täsmälleen silloin, kun

$$1 + 3a = 2 + 5a$$
$$-2a = 1$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

Vastaus

Funktio f on jatkuva, kun $a = -\frac{1}{2}$.

Esimerkki 2 Määritä $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}}$. [K70, 3]

Tapa 1

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} \quad | \cdot (2+\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(2+\sqrt{x})(x-4)}{4-x}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(2+\sqrt{x})(x-4)}{-(x-4)}$$

$$= \lim_{x \to 4} (-2-\sqrt{x})$$

$$= -2-\sqrt{4} = -4$$

Funktio $f(x) = \dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}}$ ei ole jatkuva kohdassa $x = 4$. Muokataan lauseketta. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Funktio $g(x) = -2-\sqrt{x}$ on jatkuva kohdassa $x = 4$, joten $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = g(4)$.

Tapa 2

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{-(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} (-\sqrt{x}-2)$$

$$= -\sqrt{4}-2 = -4$$

Funktio $f(x) = \dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}}$ ei ole jatkuva kohdassa $x = 4$. Muokataan lauseketta. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Funktio $g(x) = -\sqrt{x}-2$ on jatkuva kohdassa $x = 4$, joten $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = g(4)$.

Esimerkki 3 Laske $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2-x}$.

Ratkaisu

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2-x}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2(x-2) - 1 \cdot (x-2)}{-(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2-1)}{-(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (-x^2+1)$$

$$= -2^2 + 1 = -3$$

Rationaalifunktio $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2-x}$ ei ole määritelty kohdassa $x = 2$. Muokataan lauseketta.

Polynomifunktio $g(x) = -x^2 + 1$ on jatkuva kohdassa $x = 2$, joten $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2)$.

Esimerkki 4

Määritä vakio a niin, että raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+a}{x^2-x-2}$ on olemassa. Laske kyseinen raja-arvo.

Ratkaisu

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+a}{x^2-x-2}$$

Rationaalifunktio $f(x)=\dfrac{x^2-3x+a}{x^2-x-2}$ ei ole määritelty kohdassa $x=2$, koska $2^2-2-2=0$.

Nimittäjän raja-arvo on nolla, joten myös osoittajan raja-arvon on myös oltava nolla, jotta osamäärällä voisi olla raja-arvo (raja-arvon olemassaololause s. 141).

Saadaan yhtälö

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+a)=0$$
$$2^2-3\cdot 2+a=0$$
$$a=2$$

Ainoa mahdollinen vakion a arvo, jolla raja-arvo voi olla olemassa, on siis $a=2$. On vielä tutkittava, onko raja-arvoa olemassa, kun $a=2$.

Kun $a=2$, saadaan $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+a}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$.

Osoittajan nollakohdat:

$x^2-3x+2=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}$

$x=\dfrac{3\pm 1}{2}$

$x=2$ tai $x=1$

Nimittäjän nollakohdat:

$x^2-x-2=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$

$x=\dfrac{1\pm 3}{2}$

$x=2$ tai $x=-1$

Raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1\cdot(x-2)(x-1)}{1\cdot(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

Vastaus

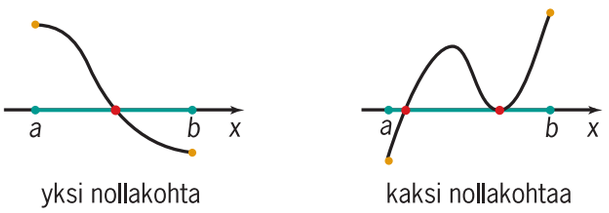
Raja-arvo on olemassa, kun $a=2$. Tällöin raja-arvo on $\dfrac{1}{3}$.

Bolzanon lause

Jos

- $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset ja
- f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$

niin funktiolla on *ainakin* yksi nollakohta avoimella välillä $]a, b[$.



yksi nollakohta kaksi nollakohtaa

Bolzanon lauseen avulla voidaan määrittää funktion nollakohdan likiarvo ns. haarukointimenetelmällä (katso Pyramidi 7, s. 119).

Esimerkki 5 Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 1 = 5x$ on ainakin yksi reaalijuuri välillä $[-2, 3]$.

Ratkaisu

Todistus. Yhtälö $x^3 + 1 = 5x$ on yhtäpitävä yhtälön $x^3 - 5x + 1 = 0$ kanssa. Tämän yhtälön reaalijuuret ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 - 5x + 1$ nollakohdat.

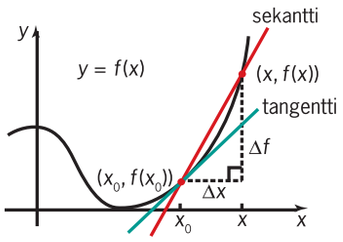
Koska

- $f(-2) = (-2)^3 - 5 \cdot (-3) + 1 = 8 > 0$
- $f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1 + 1 = -3 < 0$
- f on jatkuva suljetulla välillä $[-2, 1]$ (polynomifunktio)

niin Bolzanon lauseen mukaan funktiolla f on *ainakin* yksi nollakohta avoimella välillä $]-2, 1[$, joka sisältyy väliin $[-2, 3]$. Siis yhtälöllä $x^3 - 5x + 1 = 0$ eli yhtälöllä $x^3 + 1 = 5x$ on ainakin yksi reaalijuuri välillä $[-2, 3]$. □

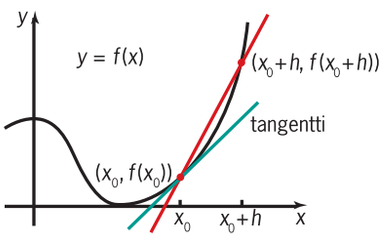
Huomautus Yhtälön $x^3 + 1 = 5x$ ratkaiseminen ei onnistu lukion tiedoilla.

7.3 Derivaatta



Funktion f derivaatta kohdassa x_0 on erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Derivaatan määritelmä toisessa muodossa on

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Sekantin kulmakertoimen $k_s = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ raja-arvo eli derivaatta on tangentin kulmakerroin.

- Funktio f on derivoituva välillä I, kun se on derivoituva välin I jokaisessa kohdassa.
- Derivoituva funktio on jatkuva.

Derivoituvan funktion monotonisuus

Olkoon funktio f jatkuva välillä I ja derivoituva tämän välin sisäpisteissä.

(1) Jos $f'(x) \geq 0$ kaikissa välin sisäpisteissä, niin f on *kasvava* välillä I.

(2) Jos $f'(x) > 0$ kaikissa välin sisäpisteissä paitsi mahdollisesti yksittäisissä pisteissä, joissa $f'(x) = 0$, niin f on *aidosti kasvava* välillä I.

(3) Jos $f'(x) \leq 0$ kaikissa välin sisäpisteissä, niin f on *vähenevä* välillä I.

(4) Jos $f'(x) < 0$ kaikissa välin sisäpisteissä paitsi mahdollisesti yksittäisissä pisteissä, joissa $f'(x) = 0$, niin f on *aidosti vähenevä* välillä I.

Derivoimissääntöjä

Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia ja c on vakio.

1.	$Dc = 0$	vakion derivaatta
2.	$Dx = 1$	identtisen funktion derivaatta
3.	$Dx^n = nx^{n-1}$	potenssifunktion derivaatta
4.	$D(cf) = c\,Df$	vakion siirtosääntö
5.	$D(f + g) = Df + Dg$	summan derivaatta
6.	$D(f - g) = Df - Dg$	erotuksen derivaatta
7.	$D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f$	tulon derivaatta
8.	$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df) \cdot g - (Dg) \cdot f}{g^2}$	osamäärän derivaatta
9.	$Du(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$	ketjusääntö

Esimerkki 1 Määritä derivaatan määritelmän avulla $f'(-1)$, kun $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

Ratkaisu Derivaatan määritelmän mukaan

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Näin ollen derivaatta kohdassa $x_0 = -1$ on

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2(-1 + h)^2 - 3(-1 + h) + 4] - [2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(1 - 2h + h^2) + 3 - 3h + 4 - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 - 7h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2h - 7)}{\cancel{h}} = -7$$

Vastaus $f'(-1) = -7$

Esimerkki 2 Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$ kuvaajan pisteeseen $(1, -1)$ piirretyn tangentin yhtälö.

Ratkaisu Funktion f derivaatta on

$$f'(x) = D\frac{x^2+1}{x-3} = \frac{2x\cdot(x-3)-1\cdot(x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$$

Tangentin kulmakerroin on siis

$$k_t = f'(1) = \frac{1^2-6\cdot 1-1}{(1-3)^2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Tangentin yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x-x_0) \qquad \left| \begin{array}{l} k = -\frac{3}{2} \\ (x_0, y_0) = (1, -1) \end{array} \right. \\ y-(-1) &= -\frac{3}{2}(x-1) \\ y+1 &= -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \quad (3x + 2y - 1 = 0)$

Esimerkki 3 Osoita, että funktion $3x^2(2x-1)^2$ derivaatalla on nollakohta lukujen 0 ja $\dfrac{1}{2}$ välissä.

Ratkaisu **Todistus.** Olkoon $f(x) = 3x^2(2x-1)^2$.

Tällöin

$$\begin{aligned} f'(x) &= D[3x^2(2x-1)^2] \qquad \left| \begin{array}{l} \text{tulon derivaatta:} \\ D(f\cdot g) = (Df)\cdot g + (Dg)\cdot f \end{array} \right. \\ &= (D3x^2)\cdot(2x-1)^2 + [D\underbrace{(2x-1)^2}_{u(s(x))}]\cdot 3x^2 \\ &= 6x\cdot(2x-1)^2 + \underbrace{2(2x-1)}_{u'(s(x))}\cdot\underbrace{2}_{s'(x)}\cdot 3x^2 \\ &= 6x(2x-1)[(2x-1)+2x] \\ &= 6x(2x-1)(4x-1) \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$6x(2x-1)(4x-1) = 0 \quad \Big| \text{ tulon nollasääntö}$$

$$6x = 0 \text{ tai } 2x - 1 = 0 \text{ tai } 4x - 1 = 0$$

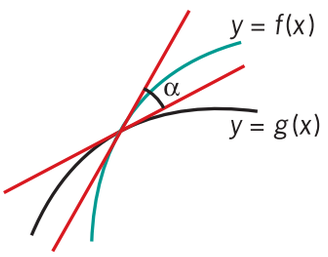
$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{1}{4}$$

Nollakohdista $x = \frac{1}{4}$ kuuluu välille $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. □

KÄYRIEN VÄLINEN KULMA

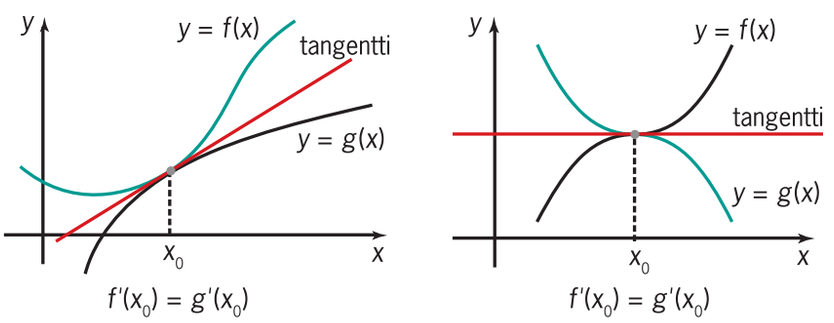
Määritelmä

Käyrien välinen kulma leikkauspisteessä on sama kuin käyrien leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma.



Määritelmä

Käyrät sivuavat toisiaan leikkauspisteessä, kun käyrien välinen kulma on 0° eli leikkauspisteeseen piirretyt käyrien tangentit yhtyvät.



Esimerkki 4 Kuinka suuressa kulmassa käyrät $y = x^2$ ja $y = x^3$ leikkaavat toisensa pisteessä $(1, 1)$?

Ratkaisu Määritetään leikkauskohtaan $x = 1$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet.

$$y_1(x) = x^2 \qquad y_2(x) = x^3$$
$$y_1'(x) = 2x \qquad y_2'(x) = 3x^2$$
$$k_1 = y_1'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \qquad k_2 = y_2'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

Määritetään tangenttien välinen kulma α.

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{2 - 3}{1 + 2 \cdot 3}\right| = \frac{1}{7}$$

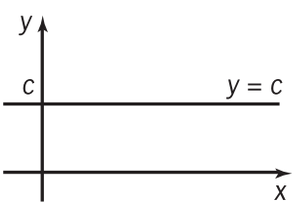
$$\alpha = 8{,}130\ldots° \approx 8{,}1°$$

Vastaus Käyrät leikkaavat 8,1°:n kulmassa.

ALKEISFUNKTIOT

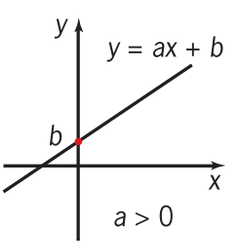
Vakiofunktio $f(x) = c$

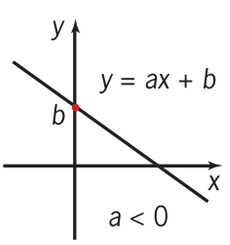
- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- arvojoukko $\mathcal{A}_f = \{c\}$
- jatkuva ja derivoituva

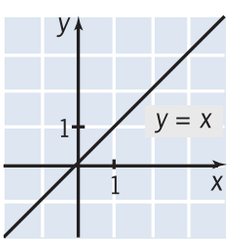


Ensimmäisen asteen polynomifunktio $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$

- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- arvojoukko $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$
- jatkuva ja derivoituva
- erikoistapauksena **identtinen funktio** $f(x) = x$







Toisen asteen polynomifunktio $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

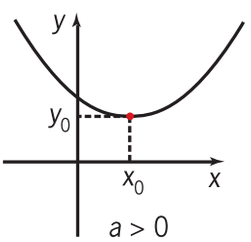
- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- arvojoukko

  $\mathcal{A}_f = [y_0, \infty[$, jos $a > 0$

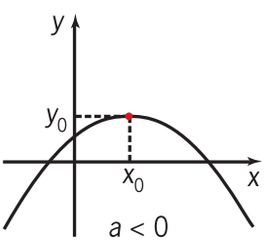
  $\mathcal{A}_f =]-\infty, y_0]$, jos $a < 0$

  kun y_0 on paraabelin huipun y-koordinaatti.

  Paraabelin huipun x-koordinaatti on $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.



$a > 0$



$a < 0$

- jatkuva ja derivoituva

Korkeamman asteen polynomifunktio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

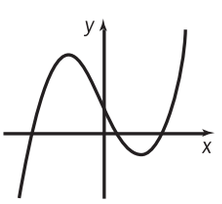
- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- arvojoukko

  $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$, kun n pariton

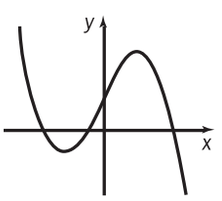
  $\mathcal{A}_f = [y_0, \infty[$, kun n parillinen ja $a_n > 0$

  $\mathcal{A}_f =]-\infty, y_0]$, kun n parillinen ja $a_n < 0$

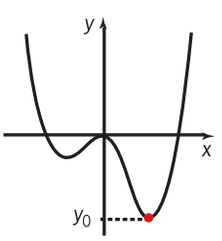
- jatkuva ja derivoituva



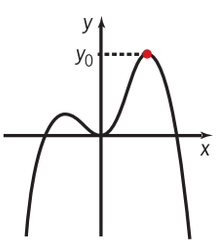
n pariton
$a_n > 0$



n pariton
$a_n < 0$



n parillinen
$a_n > 0$



n parillinen
$a_n < 0$

Esimerkki 5 Kolmannen asteen polynomifunktion nollakohtana on $x = 1$. Funktion kuvaaja kulkee pisteiden $(-1, 4)$, $(0, 2)$ ja $(2, -8)$ kautta. Määritä funktio.

Ratkaisu Kolmannen asteen polynomifunktio on muotoa

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Nollakohdan ja kuvaajan pisteiden avulla saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{array}{ll} f(1) = 0: & (1)\ a + b + c + d = 0 \\ f(-1) = 4: & (2)\ -a + b - c + d = 4 \\ f(0) = 2: & (3)\ d = 2 \\ f(2) = -8: & (4)\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{array}$$

Sijoitetaan yhtälöihin (1), (2) ja (4).

$$\begin{cases} a + b + c + 2 = 0 \\ -a + b - c + 2 = 4 \\ 8a + 4b + 2c + 2 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (5) & c = -a - b - 2 \\ (6) & -a + b - c = 2 \\ (7) & 8a + 4b + 2c = -10 \end{array}$$

Sijoitetaan yhtälöihin (6) ja (7).

$$\begin{cases} -a + b + a + b + 2 = 2 \\ 8a + 4b - 2a - 2b - 4 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (8) & b = 0 \\ (9) & 6a + 2b = -6 \end{array}$$

Sijoitetaan yhtälöön (9).

$$\begin{aligned} 6a &= -6 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $a = -1$ ja $b = 0$ yhtälöön (5).

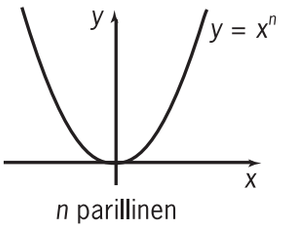
$$c = 1 - 0 - 2 = -1$$

Siis $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases}$ joten $f(x) = -x^3 - x + 2$.

Vastaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3 - x + 2$

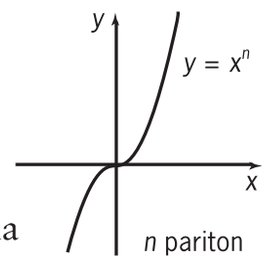
Parillinen potenssifunktio $f(x) = x^n$, $n = 2, 4, 6, \ldots$

- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- arvojoukko $\mathcal{A}_f = [0, \infty[$
- aidosti kasvava, kun $x \geq 0$
- aidosti vähenevä, kun $x \leq 0$
- jatkuva ja derivoituva
- parillinen funktio, koska $f(-x) = f(x)$ aina
- kuvaaja symmetrinen y-akselin suhteen



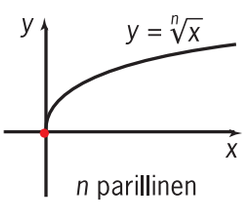
Pariton potenssifunktio $f(x) = x^n$, $n = 1, 3, 5, \ldots$

- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- arvojoukko $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$
- aidosti kasvava
- jatkuva ja derivoituva
- pariton funktio, koska $f(-x) = -f(x)$ aina
- kuvaaja symmetrinen origon suhteen



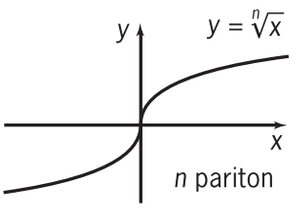
Parillinen juurifunktio $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n = 2, 4, 6, \ldots$

- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = [0, \infty[$
- arvojoukko $[0, \infty[$
- aidosti kasvava
- jatkuva ja derivoituva
- $D\sqrt[n]{x} = Dx^{\frac{1}{n}}$, $x > 0$, $n = 2, 4, 6, \ldots$



Pariton juurifunktio $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$

- määrittelyjoukko $\mathbb{R}$
- arvojoukko $\mathbb{R}$
- aidosti kasvava
- jatkuva ja derivoituva
- $D\sqrt[n]{x} = Dx^{\frac{1}{n}}$, $x > 0$, $n = 1, 3, 5, \ldots$



Esimerkki 6 Derivoi $\sqrt[5]{10x-30}$, $x > 3$.

Ratkaisu

$$D\sqrt[5]{10x-30} \qquad \mid x > 3$$

$$= D(10x-30)^{\frac{1}{5}} \qquad \left| \begin{array}{l} s(x) = 10x-30 \text{ ja } u(x) = x^{\frac{1}{5}} \\ s'(x) = 10 \quad \text{ja } u'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{\frac{1}{5}(10x-30)^{-\frac{4}{5}}}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{10}_{s'(x)} = 2(10x-30)^{-\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{2}{(10x-30)^{\frac{4}{5}}} = \frac{2}{\sqrt[5]{(10x-30)^4}}$$

Esimerkki 7 Ratkaise epäyhtälö $-4f(x) > 3f'(x)$, kun $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^4}$, $x < 1$.

Ratkaisu

Funktion $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^4} = (1-x)^{\frac{4}{3}}$ derivaatta on

$$f'(x) = \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot (-1) = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{1-x}.$$

Ratkaistaan epäyhtälö

$$-4f(x) > 3f'(x)$$

$$-4\sqrt[3]{(1-x)^4} > 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\sqrt[3]{1-x}\right)$$

$$-4\sqrt[3]{(1-x)^4} > -4\sqrt[3]{1-x} \qquad \mid : (-4) \ (< 0)$$

$$\sqrt[3]{(1-x)^4} < \sqrt[3]{1-x} \qquad \mid \text{Funktio } \sqrt[3]{} \text{ on aidosti kasvava, joten suuruusjärjestys säilyy.}$$

$$(1-x)^4 < 1-x$$

$$(1-x)^4 - (1-x) < 0$$

$$(1-x)\left[(1-x)^3 - 1\right] < 0$$

$$(1-x)\left[(1-x)(1-x)^2 - 1\right] < 0$$

$$(1-x)\left[(1-x)(1-2x+x^2) - 1\right] < 0$$

$$(1-x)(1-2x+x^2-x+2x^2-x^3-1) < 0$$

$$(1-x)(-x^3+3x^2-3x) < 0$$

$$(1-x) \cdot x \cdot (-x^2+3x-3) < 0$$

Nollakohdat:

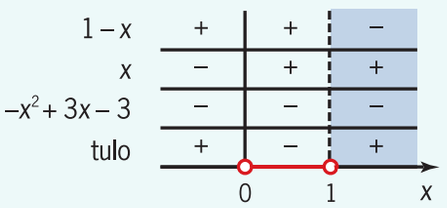
$$x = 1 \text{ tai } x = 0 \text{ tai } -x^2 + 3x - 3 = 0$$

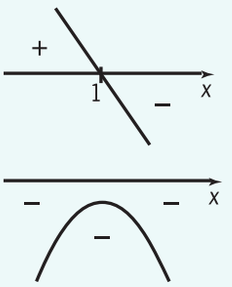
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{-2} \notin \mathbb{R}$$

ei ratkaisua

Merkkikaavio:





Vastaus $0 < x < 1$

Esimerkki 8 Ratkaise yhtälö $(x + 10^{-5})^4 = (2x - 10^{-5})^4$. [K96, 1]

Ratkaisu

$$\underbrace{(x + 10^{-5})^4}_{\geq 0} = \underbrace{(2x - 10^{-5})^4}_{\geq 0}$$

$\sqrt[4]{\ }$ aidosti kasvava, joten yhtäsuuruus säilyy.

$$\sqrt[4]{(x + 10^{-5})^4} = \sqrt[4]{(2x - 10^{-5})^4}$$

$\sqrt[4]{a^4} = |a|$

$$|x + 10^{-5}| = |2x - 10^{-5}|$$

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

$$x + 10^{-5} = \pm (2x - 10^{-5})$$

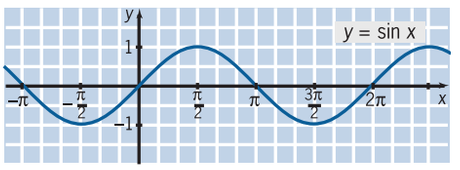
$$x + 10^{-5} = 2x - 10^{-5} \quad \text{tai} \quad x + 10^{-5} = -2x + 10^{-5}$$

$$-x = -2 \cdot 10^{-5} \quad \text{tai} \quad 3x = 0$$

$$x = 2 \cdot 10^{-5} \quad \text{tai} \quad x = 0$$

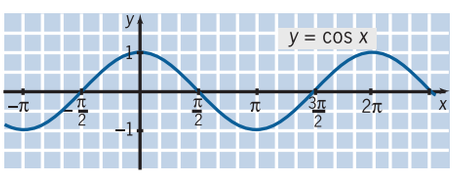
Vastaus $x = 0$ tai $x = 2 \cdot 10^{-5}$

Sinifunktio $f(x) = \sin x$



- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- arvojoukko $\mathcal{A}_f = [-1, 1]$
- perusjakso 2π
- jatkuva ja derivoituva
- $D \sin x = \cos x$
- pariton funktio, koska $\sin(-x) = -\sin x$ aina
- kuvaaja symmetrinen origon suhteen

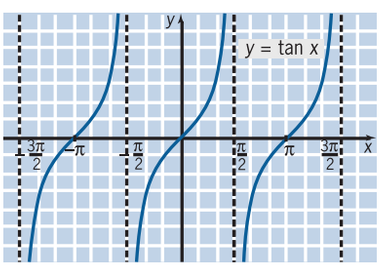
Kosinifunktio $f(x) = \cos x$



- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- arvojoukko $\mathcal{A}_f = [-1, 1]$
- perusjakso 2π
- jatkuva ja derivoituva
- $D \cos x = -\sin x$
- parillinen funktio, koska $\cos(-x) = \cos x$ aina
- kuvaaja symmetrinen y-akselin suhteen

Tangenttifunktio $f(x) = \tan x$

- määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\}$
- arvojoukko $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$
- perusjakso π
- jatkuva ja derivoituva



- $D \tan x = D \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $D \tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $D \tan x = 1 + \tan^2 x$
- pariton funktio, koska $\tan(-x) = -\tan x$ aina
- kuvaaja symmetrinen origon suhteen

Esimerkki 9 Derivoi funktio $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$.

Ratkaisu

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(\sin^2 x - \cos 2x) \\ &= D(\sin x)^2 - D\cos 2x \\ &= 2\sin x \cos x - (-\sin 2x) \cdot 2 \\ &= \sin 2x + 2\sin 2x \\ &= 3\sin 2x \end{aligned}$$

kaksinkertaisen kulman sini: $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

Esimerkki 10 Millä muuttujan x arvoilla $f'(x) = f(x)$, kun $f(x) = \tan 2x + 2$?

Ratkaisu Funktio $f(x) = \tan 2x + 2$ on määritelty, kun

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \text{eli} \quad x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Funktion f derivaatta on

$$f'(x) = D[\underbrace{\tan 2x}_{u(s(x))} + 2]$$

$s(x) = 2x$ ja $u(x) = \tan x$
$s'(x) = 2$ ja $u'(x) = 1 + \tan^2 x$

$$= [\underbrace{1 + \tan^2 2x}_{u'(s(x))}] \cdot \underbrace{2}_{s'(x)} + 0$$

$$= 2 + 2\tan^2 2x$$

Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \\ 2 + 2\tan^2 2x &= \tan 2x + 2 \\ 2\tan^2 2x - \tan 2x &= 0 \\ \tan 2x(2\tan 2x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\tan 2x = 0 \quad \text{tai} \quad \tan 2x = \frac{1}{2}$$

$\tan^{-1} 0 = 0$
$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4636\ldots$
$\tan\alpha = \tan\beta$
$\alpha = \beta + n \cdot \pi$

$$\tan 2x = \tan 0 \quad \text{tai} \quad \tan 2x = \tan 0{,}4636\ldots$$

$$2x = 0 + n \cdot \pi \quad \text{tai} \quad 2x = 0{,}4636\ldots + n \cdot \pi$$

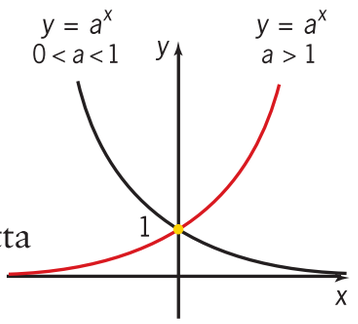
$$x = n \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{tai} \quad x = 0{,}2318\ldots + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

$x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$

Vastaus $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$ tai $x \approx 0{,}23 + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

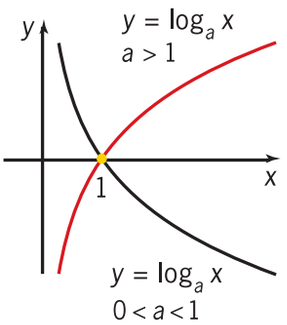
Eksponenttifunktio $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$
- $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}_+$
- aidosti kasvava, jos $a > 1$
- aidosti vähenevä, jos $0 < a < 1$
- x-akseli on asymptoottti
- kuvaaja kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta
- jatkuva ja derivoituva
- $D\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$ ja $Da^x = a^x \ln a$



Logaritmifunktio $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}_+$
- $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$
- aidosti kasvava, jos $a > 1$
- aidosti vähenevä, jos $0 < a < 1$
- y-akseli on asymptoottti
- kuvaaja kulkee pisteen $(1, 0)$ kautta
- jatkuva ja derivoituva
- $D \ln x = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$
- $D \ln|x| = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$
- $D \log_a x = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x > 0$
- $D \log_a|x| = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x \neq 0$



Logaritmin määritelmä

Positiivisen luvun x **a-kantainen logaritmi** $\log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ on eksponentti, johon kantaluku a on korotettava, jotta saataisiin **numerus** x, eli $a^{\log_a x} = x$.

Siis yhtälöt $\log_a x = y$ ja $a^y = x$ ovat yhtäpitäviä.

Logaritmin ominaisuuksia

1. $\log_a 1 = 0$	luvun yksi logaritmi
2. $\log_a a = 1$	kantaluvun logaritmi
3. $\log_a x^r = r \log_a x$	eksponentin siirtosääntö
4. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	kantaluvun vaihto
5. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	tulon logaritmi
6. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	osamäärän logaritmi

Esimerkki 11 Sievennä.

a) $5^{\frac{1}{2}\log_5 64}$ b) $\dfrac{x \ln e^x}{\ln e^{x^2}}$ c) $\lg 10x^2 - 2 \lg \dfrac{x}{100}$, $x > 0$

Ratkaisu

a) $5^{\frac{1}{2}\log_5 64} = 5^{\log_5 64^{\frac{1}{2}}} = 5^{\log_5 \sqrt{64}} = 5^{\log_5 8} = 8$

b) $\dfrac{x \ln e^x}{\ln e^{x^2}} = \dfrac{x \cdot x \ln e}{x^2 \ln e} = \dfrac{x^2 \cdot 1}{x^2 \cdot 1} = 1$

c) $\lg 10x^2 - 2 \lg \dfrac{x}{100} = \lg 10 + \lg x^2 - 2(\lg x - \lg 100)$

$= 1 + 2 \lg x - 2(\lg x - 2) = 1 + 2 \lg x - 2 \lg x + 4 = 5$

Esimerkki 12 Ratkaise yhtälö $\dfrac{1}{8} \cdot \sqrt{2^x} < 16^{-x}$.

Ratkaisu

$\dfrac{1}{8} \cdot \sqrt{2^x} < 16^{-x}$ | $2^x > 0$

$\dfrac{1}{2^3} \cdot (2^x)^{\frac{1}{2}} < (2^4)^{-x}$

$2^{-3} \cdot 2^{\frac{1}{2}x} < 2^{-4x}$

$2^{-3 + \frac{1}{2}x} < 2^{-4x}$ | 2^x aidosti kasvava, koska kantaluku $2 > 1$, joten suuruusjärjestys säilyy.

$-3 + \dfrac{1}{2}x < -4x$ | $\cdot 2$ (> 0)

$-6 + x < -8x$

$x < \dfrac{2}{3}$

Esimerkki 13 Ratkaise yhtälö $\ln(x-1)+\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 6$. [K87, 5b]

Ratkaisu Yhtälö on määritelty, kun

$$\begin{array}{lllll} x-1>0 & \text{ja} & x-2>0 & \text{ja} & x+3>0 \\ x>1 & \text{ja} & x>2 & \text{ja} & x>-3 \end{array}$$

Siis $x>2$.

$\ln(x-1)+\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 6$ | tulon logaritmi

$\ln(x-1)(x-2)(x+3)=\ln 6$ | ln aidosti kasvava, joten yhtäsuuruus säilyy.

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)(x+3)&=6\\ (x^2-2x-x+2)(x+3)&=6\\ (x^2-3x+2)(x+3)&=6\\ x^3+3x^2-3x^2-9x+2x+6&=6\\ x^3-7x&=0\\ x(x^2-7)&=0\\ x=0 \quad \text{tai} \quad x^2-7&=0\\ x&=\pm\sqrt{7} \end{aligned}$$

Saaduista juurista vain $x=\sqrt{7}$ toteuttaa ehdon $x>2$.

Esimerkki 14 Osoita, että funktio $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $-1<x<1$, on aidosti kasvava.

Ratkaisu **Todistus.** Funktio f on derivoituva, ja sen derivaatta on

$f'(x)=D\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ | $s(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ ja $u(x)=\ln x$, $u'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$= \underbrace{\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{D\frac{1+x}{1-x}}_{s'(x)} = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(-1)\cdot(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)\cdot 2}{(1+x)(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

Koska osoittaja on aina positiivinen ja koska nimittäjä $(1+x)(1-x)>0$, kun $-1<x<1$, niin aina on $f'(x)>0$.

Funktio f on siis aidosti kasvava. □

Esimerkki 15 Määritä funktion $f: f(x) = xe^{-x}$ ensimmäisen ja toisen derivaatan nollakohdat. [K82, 3a]

Ratkaisu Funktio $f(x) = xe^{-x}$ on derivoituva joukossa $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot (-1) \cdot x \qquad \big| D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f \\ &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= e^{-x}(1 - x) \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\underbrace{e^{-x}}_{\substack{>0 \\ \text{aina}}}(1 - x) = 0 \text{ eli } 1 - x = 0 \text{ eli } x = 1$$

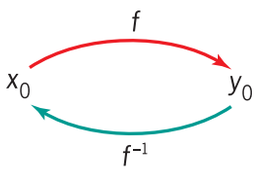
$$\begin{aligned} f''(x) &= D(e^{-x} - xe^{-x}) \\ &= e^{-x} \cdot (-1) - \left[1 \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot (-1) \cdot x\right] \\ &= -e^{-x} - e^{-x} + e^{-x} \cdot x \\ &= -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(-2 + x) \end{aligned}$$

Toisen derivaatan nollakohdat:

$$\underbrace{e^{-x}}_{\substack{>0 \\ \text{aina}}}(-2 + x) = 0 \text{ eli } -2 + x = 0 \text{ eli } x = 2$$

Vastaus $f'(x) = 0$, kun $x = 1$, ja $f''(x) = 0$, kun $x = 2$

Käänteisfunktion derivaatta



Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa x_0 ja $f'(x_0) \neq 0$.

Oletetaan lisäksi, että funktiolla f on käänteisfunktio.

Tällöin

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ jossa } y_0 = f(x_0)$$

Huomautus Jos $f'(x_0) = 0$, niin $(f^{-1})'(y_0)$ ei ole olemassa.

Esimerkki 16

Osoita, että funktiolla $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{A}_f$, $f(x) = x^5 + \ln x + 2$ on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion derivaatta kohdassa 3.

Ratkaisu

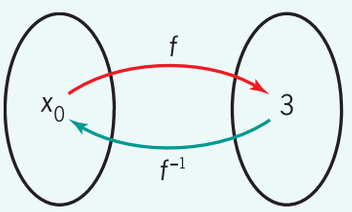
Todistus. Funktio f on derivoituva määrittelyjoukossaan $x > 0$, ja sen derivaatta on $f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{x}$.

Koska $f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{x} > 0$, kun $x > 0$, niin funktio f on aidosti kasvava. Tällöin funktiolla f on (aidosti kasvava) käänteisfunktio $f^{-1}\colon \mathcal{A}_f \to \mathbb{R}_+$. □

Funktion $f(x) = x^5 + \ln x + 2$ käänteisfunktion lauseke on vaikea määrittää, koska se edellyttää yhtälön $y = x^5 + \ln x + 2$ ratkaisemista muuttujan x suhteen, mikä ei onnistu lukion tiedoilla.

Merkitään käänteisfunktion arvoa kohdassa 3 kirjaimella x_0. Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} f^{-1}(3) &= x_0 \\ f(x_0) &= 3 \\ x_0^5 + \ln x_0 + 2 &= 3 \end{aligned}$$



Kokeilemalla havaitaan, että yhtälön ratkaisu on $x_0 = 1$, sillä tällöin yhtälön

vasen puoli on $1^5 + \ln 1 + 2 = 1 + 0 + 2 = 3$ ja

oikea puoli on 3

Yhtälöllä $f^{-1}(3) = x_0$ eli $f(x_0) = 3$ ei ole muita ratkaisuja, koska funktio f on aidosti kasvava ja saa kunkin arvonsa vaan kerran. Siis $x_0 = 1$ on yhtälön ainoa ratkaisu.

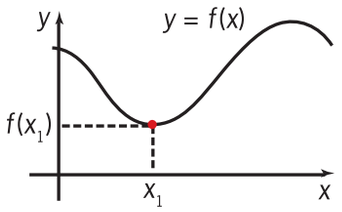
Taulukkokirjan mukaan $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, jossa $y_0 = f(x_0)$.

Tällöin

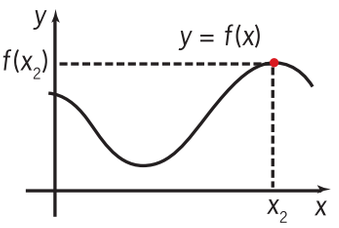
$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5 \cdot 1^4 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{6} \qquad \left| f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{x} \right.$$

7.4 Sovelluksia

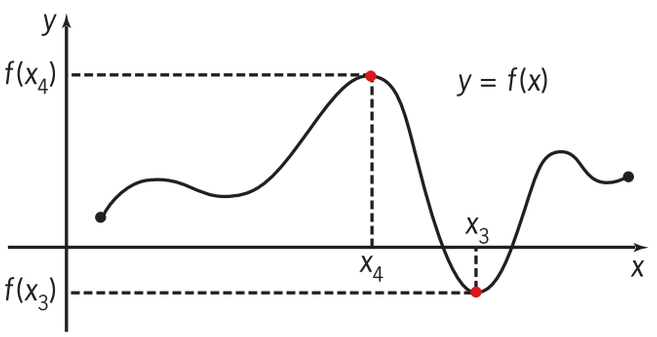
ÄÄRIARVOT



x_1 on (paikallinen) minimikohta.
$f(x_1)$ on (paikallinen) minimi(arvo).
$(x_1, f(x_1))$ on (paikallinen) minimipiste.



x_2 on (paikallinen) maksimikohta.
$f(x_2)$ on (paikallinen) maksimi(arvo).
$(x_2, f(x_2))$ on (paikallinen) maksimipiste.



x_3 on (globaali) minimikohta.
$f(x_3)$ on funktion pienin arvo.

x_4 on (globaali) maksimikohta.
$f(x_4)$ on funktion suurin arvo.

Esimerkki 1 Määritä funktion $f(x) = x^2(1 - x^2)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 2[$.

Ratkaisu Funktio f on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva.

Tutkitaan derivaatan f merkkiä.

$$f(x) = x^2(1 - x^2) \quad \big| \text{ tulon derivaatta}$$

$$f'(x) = 2x \cdot (1 - x^2) + (-2x) \cdot x^2 = 2x(1 - x^2 - x^2)$$
$$= 2x(1 - 2x^2)$$

Derivaatan nollakohdat:

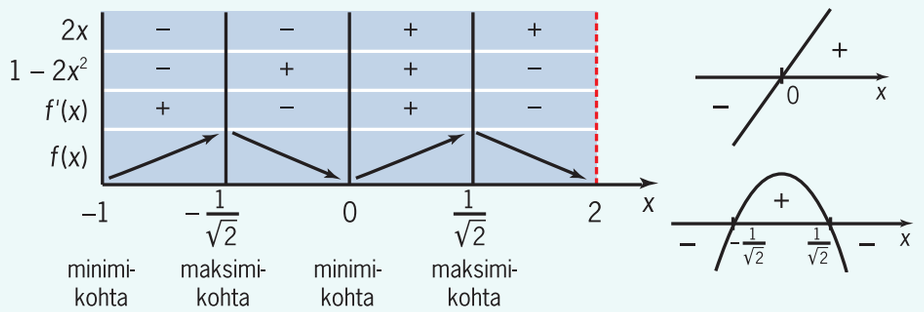
$$2x(1 - 2x^2) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad 1 - 2x^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \big| -1 < x < 2$$

kelpaa kelpaa

Funktion f kulkukaavio:



Funktio f on jatkuva, joten kulkukaavion perusteella funktion f

- suurin arvo on $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ tai $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- pienin arvo on $f(-1)$ tai $f(0)$, ellei $\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$ ole näitä arvoja pienempi.

Koska

- $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{1}{4}$

niin funktion suurin arvo on $\frac{1}{4}$.

Koska

- $f(-1) = (-1)^2[1 - (-1)^2] = 0$
- $f(0) = 0^2(1 - 0^2) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} x^2(1 - x^2) = 2^2(1 - 2^2) = -12 < 0$

niin funktiolla f ei ole pienintä arvoa.

Vastaus Suurin arvo on $\frac{1}{4}$, ja pienintä arvoa ei ole.

Esimerkki 2 Funktiolla $f(x) = ax^5 + bx$ on paikallinen ääriarvo $f(1) = -4$. Määritä muut ääriarvot.

Ratkaisu Koska $f(1) = -4$, niin saadaan yhtälö $a \cdot 1^5 + b \cdot 1 = -4$ eli $a + b = -4$.

Funktio f on derivoituva, ja sen derivaatta on $f'(x) = 5ax^4 + b$.

Koska funktiolla on ääriarvo kohdassa $x = 1$, niin pitää olla $f'(1) = 0$. Siis $5a \cdot 1^4 + b = 0$ eli $5a + b = 0$.

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{array}{lll} (1) & a + b = -4 & \mid \cdot (-1) \\ (2) & 5a + b = 0 & \mid \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & -a - b = 4 \\ + & 5a + b = 0 \\ \hline & 4a \quad = 4 \\ & a = 1 \end{array} \qquad \mid \text{Sijoitetaan yhtälöön (1).}$$

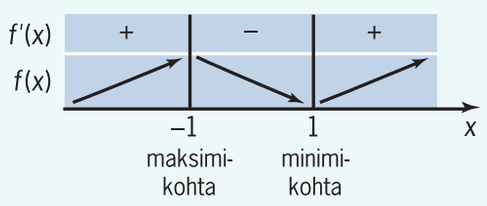
$$1 + b = -4$$
$$b = -5$$

Siis $f(x) = x^5 - 5x$.

Määritetään funktion f ääriarvot kulkukaavion avulla.

Funktion f derivaatta on $f'(x) = 5x^4 - 5$. Derivaatan nollakohdat: $5x^4 - 5 = 0$ eli $x^4 = 1$ eli $x = \pm 1$.

Koska derivaatta $f'(x) = 5x^4 - 5$ on jatkuva, sen merkki voidaan selvittää testipisteiden avulla.



x	$f'(x)$
−2	+
0	−
2	+

Funktio f on jatkuva, joten kulkukaavion perusteella funktiolla f on ääriarvon $f(1) = -4$ lisäksi ääriarvo
$f(-1) = (-1)^5 - 5 \cdot (-1) = -1 + 5 = 4$, joka on maksimi.

Vastaus Maksimi on $f(-1) = 4$.

Esimerkki 3 Tutki, onko funktiolla $x + \sin x \cos x$ ääriarvokohtia.

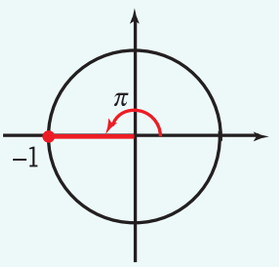
Ratkaisu Merkitään $f(x) = x + \sin x \cos x$. Funktio f on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja sen derivaatta on

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \cos x \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot \sin x \\ &= 1 + \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \left| \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \right. \\ &= 1 + \cos 2x \end{aligned}$$

Derivaatta $f'(x) = 1 + \cos 2x \geq 0$ aina, koska $-1 \leq \cos 2x \leq 1$.

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2x &= 0 \\ \cos 2x &= -1 \\ 2x &= \pi + n \cdot 2\pi \\ x &= \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Siis $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja yhtäsuuruus on voimassa vain yksittäisissä pisteissä $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Funktio f on siten aidosti kasvava koko joukossa $\mathbb{R}$, eikä sillä voi olla ääriarvokohtia.

Esimerkki 4 Osoita, että käyrä $y = x \ln x$, $x > 0$, ei ole missään kohdassa vaakasuoran suoran $y = -\frac{1}{e}$ alapuolella.

Ratkaisu **Todistus.** Olkoon

$$y_1 = x \ln x, \quad x > 0 \quad \text{ja} \quad y_2 = -\frac{1}{e}$$

Osoitetaan, että $y_1 \geq y_2$ eli $y_1 - y_2 \geq 0$ kaikilla $x > 0$.

Olkoon funktio

$$f(x) = y_1 - y_2 = x \ln x - \left(-\frac{1}{e}\right) = x \ln x + \frac{1}{e}, \quad x > 0$$

Funktio f on määrittelyjoukossaan derivoituva ja

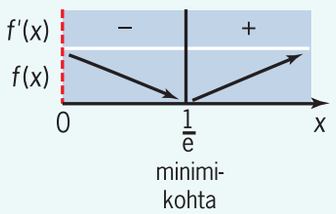
$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x + 0 = \ln x + 1$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ \log_e x &= -1 \\ x &= e^{-1} \\ x &= \frac{1}{e} \approx 0{,}37 \end{aligned}$$

Kulkukaavio:

Derivaatta on jatkuva, joten sen merkki voidaan selvittää testipisteiden avulla.



x	$f'(x)$
0,1	–
1	+

Koska funktio f on jatkuva, niin kulkukaavion perusteella funktio saa pienimmän arvonsa, kun $x = \frac{1}{e}$.

Funktion f pienin arvo on

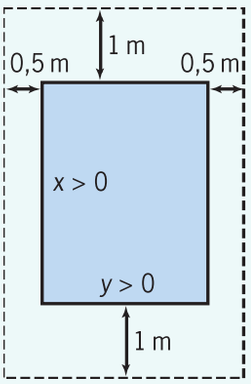
$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (-1) + \frac{1}{e} = 0$$

Tällöin $f(x) \geq 0$ kaikilla $x > 0$, joten käyrä $y = x \ln x$ ei koskaan ole suoran $y = -\frac{1}{e}$ alapuolella. □

Esimerkki 5

Pihamaalle halutaan rakentaa 50 m^2:n suuruinen, suorakulmion muotoinen uima-allas. Altaan ympärillä on pituussuunnassa 0,5 m ja leveyssuunnassa 1 m leveä laatoitus. Mitkä ovat altaan mitat, kun käytettävä maa-ala on mahdollisimman pieni?

Ratkaisu



Olkoon x altaan pituus ja y leveys metreinä. Käytettävän maa-alan pinta-ala on

$$A(x) = (x+2)(y+1) \qquad \Big| \; xy = 50 \text{ eli } y = \frac{50}{x}$$

$$= (x+2)\left(\frac{50}{x}+1\right)$$

$$= 50 + x + \frac{100}{x} + 2$$

$$= 52 + x + 100x^{-1}, \quad x > 0$$

Tutkitaan derivaatan merkkiä.

$$A'(x) = 0 + 1 + 100 \cdot (-1)x^{-2} = 1 - \frac{100}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{x^2}$$

Derivaatan nollakohdat:

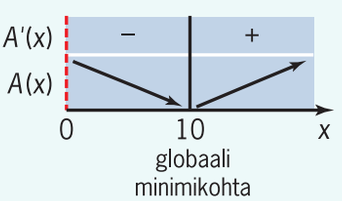
$$\frac{x^2 - 100}{x^2} = 0$$

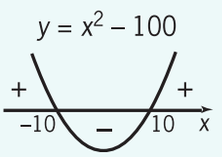
$$x^2 - 100 = 0$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$

Derivaatan merkin määrää osoittaja $x^2 - 100$, koska nimittäjä $x^2 > 0$.





Funktio A on jatkuva, joten kulkukaavion perusteella se saa pienimmän arvonsa, kun $x = 10$.

Kun $x = 10$, niin $y = \frac{50}{x} = \frac{50}{10} = 5$.

Vastaus

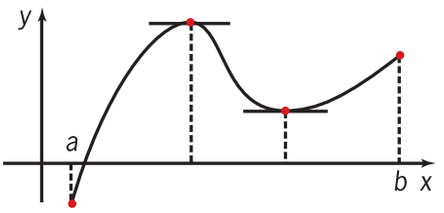
Altaan mitat ovat 10 m × 5 m.

Fermat'n lause

Jos funktio f on

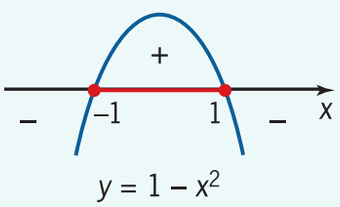
- jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja
- derivoituva avoimella välillä $]a, b[$

niin funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.



Esimerkki 6 Määritä lausekkeen $2x - \sqrt{1 - x^2}$ suurin ja pienin arvo. [K92, 7]

Ratkaisu



Merkitään $f(x) = 2x - \sqrt{1 - x^2}$.

Funktio f on määritelty, kun

$$1 - x^2 \geq 0$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

1 Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$ ja derivoituva avoimella välillä $]-1, 1[$, joten Fermat'n lauseen mukaan se saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

2 **Derivaatan nollakohdat**

$$f(x) = 2x - \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1$$

$$f'(x) = D\left(2x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right), \quad -1 < x < 1$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= 2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Saadaan yhtälö

$$2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad \left| \cdot \sqrt{1-x^2} \quad (\neq 0)\right.$$

$$2\sqrt{1-x^2} + x = 0$$

$$\underbrace{2\sqrt{1-x^2}}_{\ge 0} = \underbrace{-x}_{\ge 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a \ge 0 \text{ ja } b \ge 0, \\ \text{niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \\ -x \ge 0 \text{ eli } x \le 0 \end{array}\right.$$

$$4(1-x^2) = x^2$$

$$4 - 4x^2 = x^2$$

$$4 = 5x^2$$

$$x^2 = \frac{4}{5}$$

$$x = (\pm)\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \left| -1 < x < 1 \text{ ja } x \le 0\right.$$

3 **Funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa**

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - \sqrt{1-(-1)^2} = -2$$

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \sqrt{1-\frac{4}{5}}$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \approx -2{,}2 \quad \text{(pienin)}$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - \sqrt{1-1^2} = 2 \quad \text{(suurin)}$$

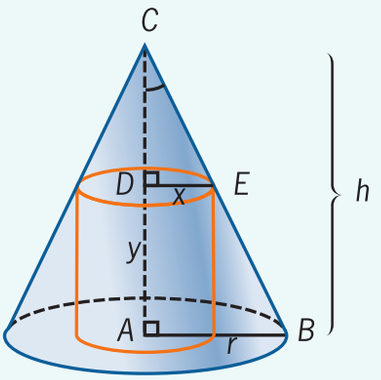
Vastaus Suurin arvo on 2 ja pienin $-\sqrt{5}$.

Esimerkki 7 Suoran ympyräkartion korkeus on h ja pohjaympyrän säde r. Määritä kartion sisään piirretyistä suorista ympyrälieriöistä tilavuudeltaan suurin. Mikä on maksimitilavuuden ja kartion tilavuuden suhde? [S80, 6]

Ratkaisu Ratkaistaan lieriön korkeus y verrannolla

$$\frac{h-y}{h} = \frac{x}{r} \quad \Big| \; \Delta ABC \sim \Delta DEC \; (kk)$$

$$hx = r(h-y)$$
$$hx = rh - ry$$
$$ry = rh - hx$$
$$y = \frac{rh - hx}{r}$$



Lieriön tilavuus on

$$V(x) = \pi x^2 y$$
$$= \pi x^2 \, \frac{rh - hx}{r} = \pi x^2 \, \frac{h(r-x)}{r}$$
$$= \frac{\pi h}{r} x^2 (r-x)$$
$$= \frac{\pi h}{r} (rx^2 - x^3), \quad 0 \le x \le r$$

jossa $x = 0$ ja $x = r$ vastaavat surkastuneita erikoistapauksia.

1 Funktio V on jatkuva suljetulla välillä $[0, r]$ ja derivoituva avoimella välillä $]0, r[$, joten se saa suurimman arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa (Fermat'n lause).

2 **Derivaatan nollakohdat**

$$V(x) = \frac{\pi h}{r} (rx^2 - x^3)$$
$$V'(x) = \frac{\pi h}{r} (2rx - 3x^2)$$
$$\frac{\pi h}{r} (2rx - 3x^2) = 0$$
$$2rx - 3x^2 = 0$$
$$x(2r - 3x) = 0$$

$x = 0$ tai $x = \frac{2}{3} r$ $\quad \Big| \; 0 < x < r$

ei kelpaa kelpaa

3 **Funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa**

$$V(0) = 0$$

$$V\left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{\pi h}{r}\left[r \cdot \left(\frac{2}{3}r\right)^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^3\right]$$

$$= \frac{\pi h}{r} \cdot r^3\left(\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\right)$$

$$= \frac{4\pi h r^2}{27} \quad \text{(suurin)}$$

$$V(r) = 0$$

Lieriön maksimitilavuus on siis $V_L = \frac{4\pi h r^2}{27}$ ja lieriön

pohjan säde on $x = \frac{2}{3}r$ ja

korkeus on $y = \frac{rh - hx}{r} = \frac{h(r-x)}{r} = \frac{h \cdot \frac{1}{3}r}{r} = \frac{1}{3}h$

Kartion tilavuus on $V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, joten tilavuuksien suhde on

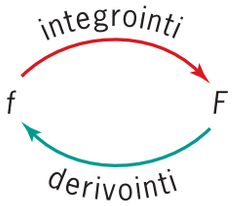
$$\frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{4\pi h r^2}{27}}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{4\pi h r^2}{27} \cdot \frac{3}{\pi r^2 h} = \frac{4}{9}$$

Vastaus

Suurimman ympyrälieriön tilavuus on $\frac{4\pi h r^2}{27}$, pohjan säde $\frac{2}{3}r$ ja korkeus $\frac{1}{3}h$. Tilavuuksien suhde on 4 : 9.

8 Integraalilaskenta

8.1 Integraalifunktio



Integraalifunktion määritelmä

Olkoon funktiot f ja F määritelty avoimella välillä I.

Jos $F' = f$, eli $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in I$, niin F on funktion f integraalifunktio.

Integroimissääntöjä

$\int k\,dx = kx + C,\ k$ on vakio

$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}\,x^{r+1} + C,\ r \neq -1$

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C,\ x < 0$

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C = \ln x + C,\ x > 0$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$

$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx,\ c$ on vakio — vakion siirto

$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ — summan integrointi

$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$ — erotuksen integrointi

$\int u(s(x)) \cdot s'(x)\,dx = U(s(x)) + C$ — yhdistetyn funktion integrointi

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx$ — osittaisintegrointi (taulukkokirjasta)

Esimerkki 1

Osoita, että funktio $f(x) = \sqrt{x^4 + 3}$ on funktion $g(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 3}}$ integraalifunktio.

Ratkaisu

Todistus. Funktiot f ja g on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$, koska $x^4 + 3 > 0$ aina.

On osoitettava, että $f'(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = D\sqrt{x^4 + 3} = D(x^4 + 3)^{\frac{1}{2}} \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = x^4 + 3 \text{ ja } u(x) = x^{\frac{1}{2}} \\ s'(x) = 4x^3 \quad \text{ja } u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(x^4 + 3)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{4x^3}_{s'(x)}$$

$$= \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 3}}$$

$= g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ □

Esimerkki 2

Määritä se funktion f : $f(x) = \sin x + 1$ integraalifunktio, joka saa arvon 3, kun $x = 0$. [K92, 1]

Ratkaisu

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x) = \int(\sin x + 1)dx = -\cos x + x + C$$

Ehdosta $F(0) = 3$ saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} -\cos 0 + 0 + C &= 3 \\ -1 + C &= 3 \\ C &= 4 \end{aligned}$$

Siis $F(x) = -\cos x + x + 4$.

Vastaus

$F(x) = -\cos x + x + 4$

Esimerkki 3 Laske. a) $\int(2x^2 - x + 3)dx$ b) $\int \cos 4x\,dx$ c) $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x}dx$

Ratkaisu

a) $\int(2x^2 - x + 3)dx$

$= 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$

b) $\int \cos 4x\,dx$ | $s(x) = 4x$ ja $u(x) = \cos x$, $s'(x) = 4$ ja $U(x) = \sin x$

$= \frac{1}{4}\int \underbrace{\cos 4x}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{4}_{s'(x)}dx$ | $\int u(s(x)) \cdot s'(x)dx = U(s(x)) + C$

$= \frac{1}{4} \cdot \sin 4x + C$

c) $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x}dx = \int\left(\frac{e^{3x}}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)dx = \int(e^{2x} - e^{-x})dx$

$= \underbrace{\int e^{2x}dx}_{u_1(s_1(x))} - \underbrace{\int e^{-x}dx}_{u_2(s_2(x))}$ | $s_1(x) = 2x$ ja $u_1(x) = e^x$, $s_1'(x) = 2$ ja $U_1(x) = e^x$; $s_2(x) = -x$ ja $u_2(x) = e^x$, $s_2'(x) = -1$ ja $U_2(x) = e^x$

$= \frac{1}{2}\int \underbrace{e^{2x}}_{u_1(s_1(x))} \cdot \underbrace{2}_{s_1'(x)}dx + \int \underbrace{e^{-x}}_{u_2(s_2(x))} \cdot \underbrace{(-1)}_{s_2'(x)}dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x} + e^{-x} + C$

Esimerkki 4 Laske. a) $\int \frac{x^3}{x^4 + 1}dx$ b) $\int \frac{x^2}{x + 1}dx$, $x < -1$

Ratkaisu

a) $\int \frac{x^3}{x^4 + 1}dx = \int \underbrace{\frac{1}{x^4 + 1}}_{u(s(x))} \cdot x^3\,dx$ | $s(x) = x^4 + 1$ ja $u(x) = \frac{1}{x}$, $s'(x) = 4x^3$ ja $U(x) = \ln|x|$

$= \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{1}{x^4 + 1}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{4x^3}_{s'(x)}dx = \frac{1}{4}\underbrace{\ln|x^4 + 1|}_{U(s(x))} + C$ | $x^4 + 1 > 0$

$= \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1) + C$

b) $\dfrac{x^2}{x+1}\,dx,\ x < -1$

Koska osoittajan asteluku on suurempi kun nimittäjän, suoritetaan jakolasku $\dfrac{x^2}{x+1}$ käyttämällä ryhmittelyä.

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x^2-1)+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Saadaan

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

$$= \int (x - 1 + \frac{1}{x+1})\,dx$$

$$= \int (x-1)dx + \int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{u(s(x))} dx \qquad \left| \begin{array}{l} s(x) = x+1 \text{ ja } u(x) = \frac{1}{x} \\ s'(x) = 1 \qquad \text{ja } U(x) = \ln|x| \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{u(s(x))} \cdot \underbrace{1}_{s'(x)}\,dx \quad \left| \int u(s(x)) \cdot s'(x)dx = U(s(x)) + C \right.$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \underbrace{\ln|x+1|}_{U(s(x))} + C \quad \left| \, x < -1, \text{ joten } x+1 < 0 \right.$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(-x-1) + C$$

PALOITTAIN MÄÄRITELLYN FUNKTION INTEGROINTI

Paloittain määritellyn jatkuvan funktion integroinnissa voidaan käyttää seuraavaa lausetta:

Lause

Jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.

Esimerkki 5 Olkoon F funktion $f(x) = |2x + 6|$ se integraalifunktio, jolle $F(0) = 18$. Laske $F(-10)$.

Ratkaisu Funktio $f(x) = |2x + 6|$ on jatkuva, joten sillä on integraalifunktio.

Koska $f(x) = |2x + 6| = \begin{cases} 2x + 6, \text{ kun } x \geq -3 \\ -2x - 6, \text{ kun } x < -3 \end{cases}$ niin funktion f integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + C, & \text{kun } x \geq -3 \\ -x^2 - 6x + D, & \text{kun } x < -3 \end{cases}$$

Integraalifunktio F on derivoituvana funktiona myös jatkuva kohdassa $x = -3$, joten $\lim\limits_{x \to -3-} F(x) = \lim\limits_{x \to -3+} F(x)$.

Koska

- $\lim\limits_{x \to -3-} F(x) = \lim\limits_{x \to -3-} (-x^2 - 6x + D) = 9 + D$
- $\lim\limits_{x \to -3+} F(x) = \lim\limits_{x \to -3+} (x^2 + 6x + C) = -9 + C$

niin saadaan yhtälö $9 + D = -9 + C$ eli $D = -18 + C$.

Funktion f integraalifunktiot ovat siis

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + C, & \text{kun } x \geq -3 \\ -x^2 - 6x - 18 + C, & \text{kun } x < -3. \end{cases}$$

Ehdon $F(0) = 18$ mukaan saadaan yhtälö $0^2 + 6 \cdot 0 + C = 18$ eli $C = 18$.

Tällöin $F(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 18, \text{ kun } x \geq -3 \\ -x^2 - 6x, & \text{kun } x < -3. \end{cases}$

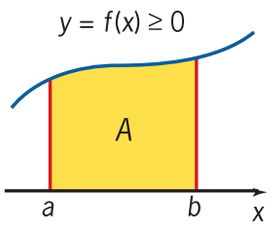
Näin ollen $F(-10) = -(-10)^2 - 6 \cdot (-10) = -100 + 60 = -40$.

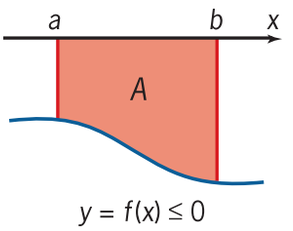
Vastaus $F(-10) = -40$

8.2 Määrätty integraali

Olkoon f jatkuva ja $a < b$. Tällöin määrätty integraali

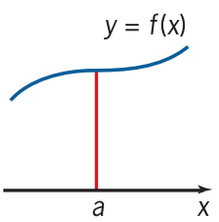
- $\int_a^b f(x)dx = A$, kun $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$
- $\int_a^b f(x)dx = -A$, kun $f(x) \leq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$

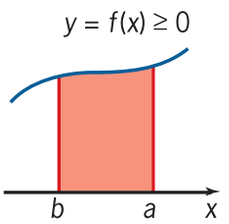




Määritelmiä

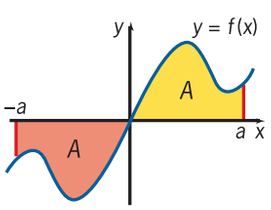
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad a > b$



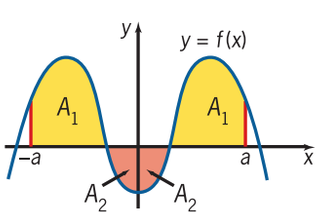


Määrätyn integraalin ominaisuuksia

- $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, jossa k on vakio
- $\int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



- $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, jos f on pariton funktio



- $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, jos f on parillinen funktio

Analyysin peruslause yhdistää toisiinsa määrätyn integraalin ja integraalifunktion.

Analyysin peruslause

$$\int_a^b f(x)dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

jossa F on funktion f integraalifunktio.

Esimerkki 1 Laske määrätty integraali. a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx$

b) $\int_4^6 \frac{x^2}{x-3}\,dx + \int_4^6 \frac{9}{3-x}\,dx$ c) $\int_0^6 |5-x|\,dx$

Ratkaisu

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \underbrace{\sin^2 x}_{u(s(x))} \underbrace{\cos x}_{s'(x)} dx$

$\begin{vmatrix} s(x) = \sin x \quad \text{ja } u(x) = x^2 \\ s'(x) = \cos x \text{ ja } U(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{vmatrix}$

$$= \Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{3}(\sin x)^3 = \frac{1}{3}(\sin\pi)^3 - \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

b) $\int_4^6 \frac{x^2}{x-3}\,dx + \int_4^6 \frac{9}{3-x}\,dx = \int_4^6 \frac{x^2}{x-3}\,dx - \int_4^6 \frac{9}{x-3}\,dx$

$$= \int_4^6 \left(\frac{x^2}{x-3} - \frac{9}{x-3}\right)dx = \int_4^6 \frac{x^2-9}{x-3}dx = \int_4^6 \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\,dx$$

$$= \int_4^6 (x+3)\,dx = \Big/_4^6 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6^2 + 3\cdot 6 - \left(\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 3\cdot 4\right)$$

$$= 18 + 18 - 8 - 12$$

$$= 16$$

c) $\int_0^6 |5-x|\,dx$ $\quad\Big|\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$= \int_0^5 |5-x|\,dx + \int_5^6 |5-x|\,dx$ $\quad\Big|\ \underbrace{|5-x|}_{\geq 0} = 5-x, \quad \text{kun } 0 \leq x \leq 5$

$\quad\Big|\ \underbrace{|5-x|}_{\leq 0} = -5+x, \text{ kun } 5 \leq x \leq 6$

$= \int_0^5 (5-x)\,dx + \int_5^6 (-5+x)\,dx$

$= \Big/_0^5 \left(5x - \frac{1}{2}x^2\right) + \Big/_5^6 \left(-5x + \frac{1}{2}x^2\right)$

$= 5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 0 + \left(-5 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6^2\right) - \left(-5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5^2\right)$

$= 25 - 12\frac{1}{2} - 30 + 18 + 25 - 12\frac{1}{2}$

$= 13$

Esimerkki 2 Laske $\int_0^{\ln 2} (e^{3x} + 2e^{-x})\,dx$. [S96, 2a]

Ratkaisu

$$\int_0^{\ln 2} (e^{3x} + 2e^{-x})\,dx = \int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx + 2\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 2} \underbrace{e^{3x}}_{u_1(s_1(x))} \cdot \underbrace{3}_{s_1'(x)}\,dx + 2 \cdot (-1)\int_0^{\ln 2} \underbrace{e^{-x}}_{u_2(s_2(x))} \cdot \underbrace{(-1)}_{s_2'(x)}dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big/_0^{\ln 2} e^{3x} - 2\Big/_0^{\ln 2} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{3}(e^{3\cdot \ln 2} - e^{3\cdot 0}) - 2(e^{-\ln 2} - e^{-0})$$

$$= \frac{1}{3}(e^{\ln 2^3} - e^0) - 2(e^{\ln 2^{-1}} - e^0) \qquad \Big|\ e^{\ln a} = a,\ a > 0$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 1) - 2(2^{-1} - 1) = \frac{1}{3} \cdot 7 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} + 1$$

$$= 3\frac{1}{3}$$

Esimerkki 3 Määritä funktion $f(x) = \int_0^x (1 - t^2)\,dt$, $x \geq 0$, suurin arvo.

Ratkaisu Funktio on

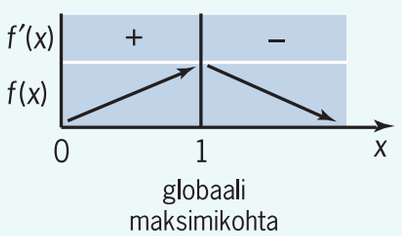
$$f(x) = \int_0^x (1 - t^2)\,dt = \Big/_0^x \left(t - \frac{1}{3}t^3\right) = x - \frac{1}{3}x^3, \quad x \geq 0$$

Tarkastellaan funktion f derivaatan $f'(x) = 1 - x^2$ merkkiä.

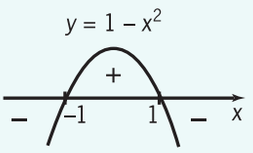
Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \qquad \big| \; x \geq 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Funktion kulkukaavio:



globaali maksimikohta



Funktio f on jatkuva, joten kulkukaavion perusteella funktion suurin arvo on

$$f(1) = 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{2}{3}$$

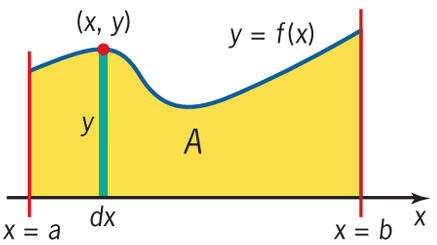
Vastaus Suurin arvo on $\frac{2}{3}$.

PINTA-ALA

Käyrien rajaaman alueen alan määrittäminen integroimalla muuttujan x suhteen.

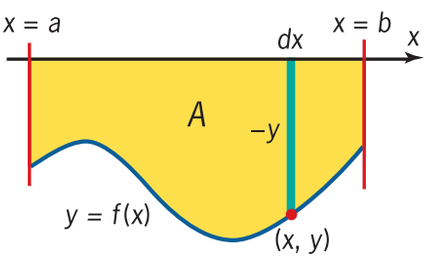
- $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



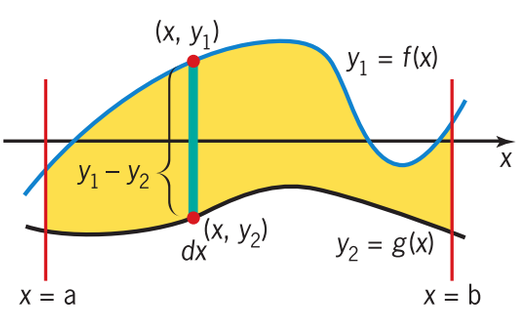
- $f(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b (-y)\,dx = -\int_a^b y\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$



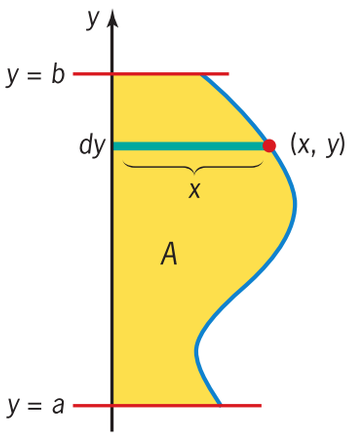
- $f(x) \geq g(x)$ välillä $[a, b]$

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

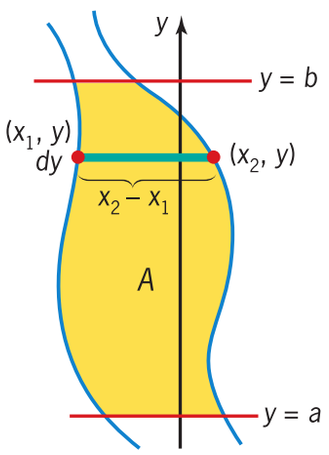


Käyrien rajaaman alueen alan määrittäminen integroimalla muuttujan y suhteen.

- $A = \int_a^b dA = \int_a^b x\,dy$



- $A = \int_a^b dA = \int_a^b (x_2 - x_1)\,dy$



Esimerkki 4 Määritä käyrän $y = x^6 - x^4$ ja x-akselin rajaaman kaksiosaisen alueen ala.

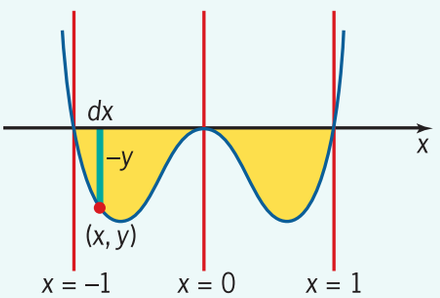
Ratkaisu Määritetään käyrän ja x-akselin leikkauskohdat.

$$y = 0$$
$$x^6 - x^4 = 0$$
$$x^4(x^2 - 1) = 0$$
$$x^4 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 1 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm 1$$

Käyrää $y = x^6 - x^4$ vastaava funktio $f(x) = x^6 - x^4$ on jatkuva, joten funktion merkki voidaan selvittää testipisteiden avulla.

x	$f(x) = x^6 - x^4$	kommentti
–2	48	$f(x) > 0$, kun $x < -1$
–0,5	–0,05	$f(x) < 0$, kun $-1 < x < 0$
0,5	–0,05	$f(x) < 0$, kun $0 < x < 1$
2	48	$f(x) > 0$, kun $x > 1$

Piirretään mallikuva.



Siis $y = x^6 - x^4 \le 0$, kun $-1 \le x \le 1$.

Saadaan

$$A = \int_{-1}^{1} dA = \int_{-1}^{1} (-y)\,dx \qquad \Big| \; y = x^6 - x^4$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x^6 + x^4)\,dx = \Big/_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{5}x^5 \right)$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot 1^7 + \frac{1}{5} \cdot 1^5 - \left[-\frac{1}{7} \cdot (-1)^7 + \frac{1}{5} \cdot (-1)^5 \right]$$

$$= -\frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} = -\overset{5)}{\frac{2}{7}} + \overset{7)}{\frac{2}{5}} = \frac{-10 + 14}{35} = \frac{4}{35}$$

Vastaus Ala on $\frac{4}{35}$.

Esimerkki 5 Määritä käyrien $x = y^2 - y$ ja $x = 2y - \frac{1}{2}y^2$ rajaaman alueen ala.

Ratkaisu Määritetään oikealle aukeavan paraabelin $x_1 = y^2 - y$ ja vasemmalle aukeavan paraabelin $x_2 = 2y - \frac{1}{2}y^2$ leikkauspisteiden y-koordinaatit.

$$\begin{cases} (1)\ x = y^2 - y \\ (2)\ x = 2y - \frac{1}{2}y^2 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön (2).}$$

$$y^2 - y = 2y - \frac{1}{2}y^2 \quad \Big| \cdot 2$$

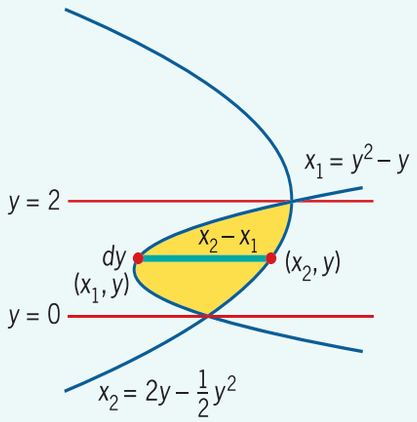
$$2y^2 - 2y = 4y - y^2$$

$$3y^2 - 6y = 0$$

$$3y(y - 2) = 0$$

$$y = 0 \text{ tai } y = 2$$

Piirretään mallikuva.



Pinta-ala on

$$A = \int_0^2 dA = \int_0^2 (x_2 - x_1)\, dy = \int_0^2 \left[\left(2y - \frac{1}{2}y^2\right) - (y^2 - y)\right] dy$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}y^2 + 3y\right) dy = \Big/_0^2 \left(-\frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}y^2\right)$$

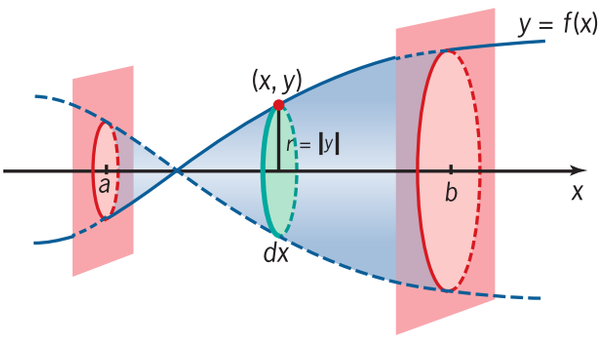
$$= -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 0 = -4 + 6 = 2$$

Vastaus Alueen ala on 2.

Pyörähdyskappaleen tilavuus

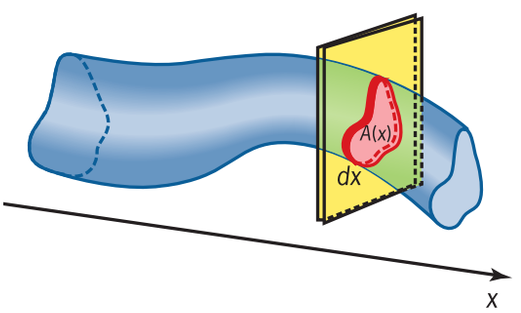
Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion f kuvaaja eli käyrä $y = f(x)$ rajoittaa pyörähtäessään x-akselin ympäri tasojen $x = a$ ja $x = b$ kanssa kappaleen, jonka tilavuus on

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$



Kappaleen tilavuus

Jos kappaleen tilavuusalkion tilavuus on $dV = A(x)dx$, niin kappaleen tilavuus on $V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)dx$.



Esimerkki 6 Käyrien $y = x^2$ ja $y = \sqrt{x}$ rajaama äärellinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

Ratkaisu Käyrien $y_1 = x^2$ ja $y_2 = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, leikkauskohdat:

$$y_1 = y_2$$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^3 = 1 \qquad | \; x \geq 0$$

$$\text{kelpaa} \qquad x = \sqrt[3]{1}$$

$$x = 1 \qquad | \; x \geq 0$$

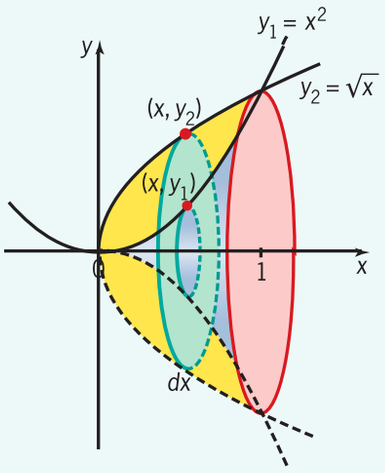
$$\text{kelpaa}$$

Alue muodostuu siis välille $[0, 1]$.

Käyriä $y_1 = x^2$ ja $y_2 = \sqrt{x}$ vastaavat funktiot ovat jatkuvia, joten käyrien järjestys voidaan selvittää testipisteen avulla.

x	$y_1 = x^2$	$y_2 = \sqrt{x}$	kommentti
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$y_1 < y_2$, kun $0 < x < 1$

Siis tilavuus on



$$V = V_2 - V_1 = \int_0^1 dV_2 - \int_0^1 dV_1 = \int_0^1 \pi y_2^2 \, dx - \int_0^1 \pi y_1^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_0^1 x \, dx - \pi \int_0^1 x^4 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4) \, dx = \pi \Big/_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right)$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{5} \cdot 1^5 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{5} \cdot 0^5 \right) \right] = \frac{3}{10}\pi$$

Vastaus Tilavuus on $\frac{3}{10}\pi \approx 0{,}94$.

Esimerkki 7 Laske käyrän $y^2 = (e^x - 1)(e - e^x)$ pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus. [S90, 7b]

Ratkaisu Koska käyrän yhtälön $y^2 = (e^x - 1)(e - e^x)$ vasen puoli on ei-negatiivinen, yhtälö on määritelty, kun oikea puoli on ei-negatiivinen eli kun

$$(e^x - 1)(e - e^x) \geq 0$$

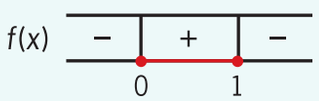
Nollakohdat:

$$(e^x - 1)(e - e^x) = 0$$

$$\begin{array}{lllll} e^x - 1 = 0 & \text{tai} & e - e^x = 0 & & \\ e^x = 1 & \text{tai} & e^x = e & \left| \begin{array}{l} e^x \text{ aidosti kasvava,} \\ \text{joten yhtäsuuruus} \\ \text{säilyy.} \end{array} \right. & \\ e^x = e^0 & \text{tai} & e^x = e^1 & & \\ x = 0 & \text{tai} & x = 1 & & \end{array}$$

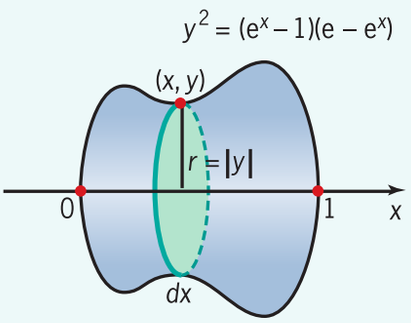
Merkkikaavio:

Funktio $f(x) = (e^x - 1)(e - e^x)$ on jatkuva, joten selvitetään sen merkki testipisteiden avulla.



x	$f(x)$
−0,5	−0,8
0,5	0,7
2	−30

Käyrän yhtälö on siis määritelty, kun $0 \leq x \leq 1$, joten pyörähdyskappale muodostuu välille $[0, 1]$. Tällöin



$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi \int_0^1 (e^x - 1)(e - e^x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (e^x \cdot e - (e^x)^2 - e + e^x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (e^{x+1} - e^{2x} - e + e^x)\,dx$$

$$= \pi \Big/_0^1 \left(e^{x+1} - \frac{1}{2}e^{2x} - ex + e^x\right)$$

$$= \pi \left[(e^2 - \frac{1}{2}e^2 - e + e) - (e - \frac{1}{2} - 0 + 1)\right]$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2}\right) \approx 1{,}5$$

Vastaus Tilavuus on $\pi\left(\frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2}\right) \approx 1{,}5$.

9 Lukujonot ja summat

9.1 Peruskäsitteitä

Lukujono $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ on **päättyvä**, ja lukujono $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ on **päättymätön**.

Lukujono voidaan ilmoittaa esimerkiksi

- **analyyttisessa muodossa**, jolloin jonon n:s termi a_n esitetään indeksin n lausekkeena
- **rekursiivisessa muodossa**, jolloin annetaan yksi tai useampi termi jonon alusta sekä sääntö, jonka avulla muut termit voidaan laskea edellisten termien avulla.

Esimerkki 1

Määritä lukujonon (a_n) neljä ensimmäistä termiä, kun lukujonon

a) analyyttinen muoto on

$$a_n = n^2 - n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) rekursiivinen muoto on

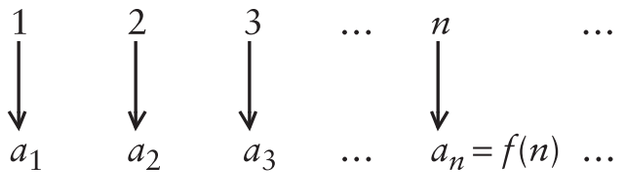
$$a_1 = 2 \text{ ja } a_{n+1} = 3a_n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ratkaisu

a) ensimmäinen termi on $a_0 = 0^2 - 0 = 0$
toinen termi on $a_1 = 1^2 - 1 = 0$
kolmas termi on $a_2 = 2^2 - 2 = 2$
neljäs termi on $a_3 = 3^2 - 3 = 6$

b) ensimmäinen termi on $a_1 = 2$
toinen termi on $a_2 = 3a_1 - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
kolmas termi on $a_3 = 3a_2 - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$
neljäs termi on $a_4 = 3a_3 - 1 = 3 \cdot 14 - 1 = 41$

Päättymätön lukujono $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ voidaan ymmärtää funktioksi f, jonka muuttuja on lukujonon indeksi n ja arvo $f(n) = a_n$. Yleensä indeksi $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tai $n \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.



Koska lukujonoa voidaan pitää funktiona, lukujonojen yhteydessä on mielekästä puhua samankaltaisista ominaisuuksista kuin funktion yhteydessä. Tällaisia ominaisuuksia ovat esimerkiksi monotonisuus, pienin ja suurin arvo sekä raja-arvo.

Päättymätön lukujono (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, on

- **aidosti kasvava**, kun $a_k < a_{k+1}$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$
- **kasvava**, kun $a_k \leq a_{k+1}$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$
- **aidosti vähenevä**, kun $a_k > a_{k+1}$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$
- **vähenevä**, kun $a_k \geq a_{k+1}$ kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$

Lukujono on (**aidosti**) **monotoninen**, kun se on (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Esimerkki 2

Osoita, että lukujono $\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)$, jossa $n = 1, 2, \ldots$, on aidosti kasvava.

Tapa 1

Todistus. Lukujonon jokainen termi on positiivinen, koska $n^2 + 1 > 0$ ja $n + 1 > 0$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Kahden peräkkäisen termin suhde on

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2+1}{(k+1)+1} : \frac{k^2+1}{k+1} = \frac{k^2+2k+2}{k+2} \cdot \frac{k+1}{k^2+1}$$

$$= \frac{(k^2+2k+2)(k+1)}{(k+2)(k^2+1)}$$

$$= \frac{k^3+k^2+2k^2+2k+2k+2}{k^3+k+2k^2+2}$$

$$= \frac{k^3+3k^2+4k+2}{k^3+2k^2+k+2} > 1 \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots$$

koska osoittaja on suurempi kuin nimittäjä ja molemmat ovat positiivisia.

Siis

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \qquad \Big| \cdot a_k \ (> 0 \text{ kaikilla } k)$$

$$a_{k+1} > a_k$$

Lukujono (a_n) on siis aidosti kasvava. □

Tapa 2

Todistus. Lukujonon $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ käyttäytymistä voidaan tutkia jatkuvan ja derivoituvan funktion $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, $x > -1$, avulla.

Osamäärän derivoimissäännön mukaan

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - 1 \cdot (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

Osoittajan nollakohdat:

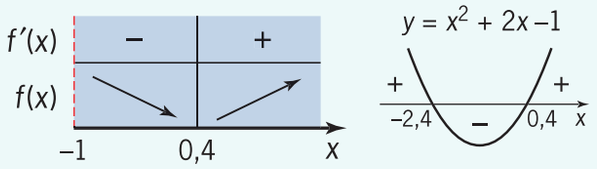
$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x \approx 0{,}4 \quad \text{tai} \quad x \approx -2{,}4$$

Derivaatan merkin määrää osoittaja $x^2 + 2x - 1$, sillä nimittäjä $(x+1)^2 > 0$ kaikilla $x > -1$.

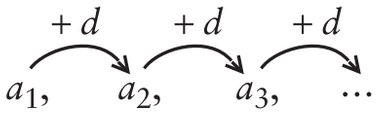


Funktio f on siis aidosti kasvava, kun $x \geq 1$.

Tällöin myös lukujono (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, on aidosti kasvava. □

9.2 Aritmeettinen lukujono ja summa

Aritmeettisessa jonossa seuraava termi saadaan lisäämällä sitä edeltävään termiin vakio d, eli $a_{n+1} = a_n + d$.



difference
erotus

Ehdosta $a_{n+1} = a_n + d$ saadaan $a_{n+1} - a_n = d$, eli aritmeettisen lukujonon kahden peräkkäisen termin erotus on aina vakio d. Vakiota d sanotaan **erotusluvuksi**.

Aritmeettisen jonon yleinen termi

Aritmeettisen lukujonon n:s termi on $a_n = a_1 + (n-1)d$, jossa a_1 on lukujonon ensimmäinen termi ja d erotusluku.

Aritmeettinen summa

Päättyvän aritmeettisen lukujonon $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ termien summa on

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

eli termien lukumäärä kertaa ensimmäisen ja viimeisen termin (aritmeettinen) keskiarvo.

Esimerkki 1 Aritmeettisessa lukujonossa (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, on $a_2 = 6$ ja $d = 4$. Onko luku 42 lukujonon jäsen ja jos on, niin kuinka mones jäsen?

Ratkaisu Aritmeettisen lukujonon yleinen termi on $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Tällöin

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + (2-1)d \qquad \big| \; a_2 = 6,\ d = 4 \\ 6 &= a_1 + 4 \\ a_1 &= 2 \end{aligned}$$

Näin ollen $a_n = a_1 + (n-1)\,d = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$.
Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned} a_n &= 42 \\ 4n - 2 &= 42 \\ 4n &= 44 \\ n &= 11 \qquad \big| \; n = 1, 2, 3, \ldots \\ &\text{kelpaa} \end{aligned}$$

Siis luku 42 on jonon yhdestoista termi.

Vastaus Luku 42 on jonon yhdestoista termi.

Esimerkki 2 Laske summa $\sum_{n=0}^{1000} (7 - 5n)$.

Ratkaisu Summa

$$\sum_{n=0}^{1000} (7 - 5n) = 7 + 2 + (-3) + (-8) + (-13) + \cdots + (-4993)$$

on aritmeettinen, koska erotus

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [7 - 5(n+1)] - (7 - 5n) \\ &= 7 - 5n - 5 - 7 + 5n \\ &= -5 \end{aligned}$$

on vakio eli riippumaton indeksin n arvosta.

Tällöin

$$\sum_{n=0}^{1000} (7 - 5n) = 1001 \cdot \frac{7 + (-4993)}{2} = -2\,495\,493$$

Vastaus –2 495 493

Esimerkki 3 Aritmeettisen lukujonon kymmenen ensimmäisen termin summa $S_{10} = 3$ ja vastaavasti $S_{15} = 6$. Määritä S_{25}.

Ratkaisu Koska lukujono on aritmeettinen, niin ehdoista $S_{10} = 3$ ja $S_{15} = 6$ saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 10 \cdot \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} = 3 \\ 15 \cdot \dfrac{a_1 + a_{15}}{2} = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mid a_{10} = a_1 + (10-1)d = a_1 + 9d \\ \mid a_{15} = a_1 + (15-1)d = a_1 + 14d \end{array}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot (a_1 + a_1 + 9d) = 3 \\ 15 \cdot (a_1 + a_1 + 14d) = 12 \end{cases} \quad \mid : 3$$

$$(1) \quad \begin{cases} 10a_1 + 45d = 3 \\ 10a_1 + 70d = 4 \end{cases} \quad \mid \cdot (-1)$$

$$+ \begin{cases} -10a_1 - 45d = -3 \\ 10a_1 + 70d = 4 \end{cases}$$

$$25d = 1$$

$$d = \frac{1}{25}$$

Ensimmäinen termi saadaan yhtälöstä (1):

$$10a_1 + 45d = 3$$

$$10a_1 + 45 \cdot \frac{1}{25} = 3$$

$$10a_1 = \frac{6}{5}$$

$$a_1 = \frac{3}{25}$$

Tällöin

$$S_{25} = 25 \cdot \frac{a_1 + a_{25}}{2} = 25 \cdot \frac{a_1 + (a_1 + 24d)}{2}$$

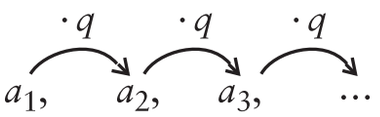
$$= 25 \cdot \frac{2a_1 + 24d}{2} = 25 \cdot (a_1 + 12d)$$

$$= 25 \cdot \left(\frac{3}{25} + 12 \cdot \frac{1}{25} \right) = 25 \cdot \frac{15}{25} = 15$$

Vastaus $S_{25} = 15$

9.3 Geometrinen lukujono ja summa

Geometrisessa lukujonossa seuraava termi saadaan kertomalla sitä edellinen termi vakiolla q, eli $a_{n+1} = a_n q$.



quotient
osamäärä
suhde

Jos $a_n \neq 0$ kaikilla n, ehdosta $a_{n+1} = a_n q$ saadaan $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Geometrisessa lukujonossa kahden peräkkäisen termin suhde on siis vakio q, jos lukujonon kaikki termit ovat nollasta poikkeavia. Vakiota q sanotaan **suhdeluvuksi**.

Geometrisen lukujonon yleinen termi

Geometrisen lukujonon n:s termi on $a_n = a_1 q^{n-1}$, jossa a_1 on lukujonon ensimmäinen termi ja q suhdeluku.

Geometrinen summa

Päättyvän geometrisen lukujonon $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, jonka suhdeluku on q ja jossa on n termiä, termien summa on

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ kun } q \neq 1$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \underbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \text{ kpl}} = na_1, \text{ kun } q = 1$$

Esimerkki 1

Lukujonossa on termit $a_{10} = 3$ ja $a_{15} = 6$. Määritä a_{25}, kun lukujono on geometrinen.

Ratkaisu

Koska lukujono on geometrinen, niin yleinen termi on $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a_{10} = a_1 q^9 \\ a_{15} = a_1 q^{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = a_1 q^9 \\ 6 = a_1 q^{14} \end{cases} \quad \Big| : q^9 \ (\neq 0)$$

$$\begin{cases} (1)\ a_1 = \dfrac{3}{q^9} \\ (2)\ 6 = a_1 q^{14} \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön (2).}$$

$$6 = \frac{3}{q^9} \cdot q^{14}$$

$$6 = 3q^5$$

$$q^5 = 2$$

$$q = \sqrt[5]{2} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön (1).}$$

$$a_1 = \frac{3}{q^9} = \frac{3}{(\sqrt[5]{2})^9}$$

Tällöin

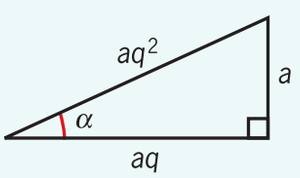
$$a_{25} = a_1 q^{24} = \frac{3}{(\sqrt[5]{2})^9} \cdot (\sqrt[5]{2})^{24} = 3 \cdot (\sqrt[5]{2})^{15}$$

$$= 3 \cdot \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{15} = 3 \cdot 2^3 = 24$$

Vastaus $a_{25} = 24$

Esimerkki 2 Suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet muodostavat geometrisen jonon. Laske kolmion pienin kulma tarkkuudella 0,1°.

Ratkaisu Olkoon pienin kateetti a (>0) ja geometrisen jonon suhdeluku q (> 1). Tällöin toinen kateetti on aq ja hypotenuusa aq^2.



Pythagoraan lauseen mukaan

$$(aq^2)^2 = a^2 + (aq)^2$$

$$a^2q^4 = a^2 + a^2q^2 \quad \big| : a^2 \quad (\neq 0)$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \quad \big| \text{ Merkitään } x = q^2.$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \big| \; x = q^2,\ x > 0$$

$$q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$q = (\pm)\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = 1{,}2720\ldots \quad \big| \; q > 1$$

Tällöin

$$\tan\alpha = \frac{a}{aq}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{q}$$

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}}$$

$$\alpha = 38{,}172\ldots^\circ \approx 38{,}2^\circ$$

Vastaus Pienin kulma on 38,2°.

Esimerkki 3 Saara päätti ryhtyä säästämään rahaa polkupyörää varten. Hän suunnitteli panevansa säästöpossuun kesäkuun 1. päivänä 1 sentin, 2. päivänä 2 senttiä, 3. päivänä 4 senttiä, 4. päivänä 8 senttiä ja niin edelleen aina kaksinkertaisen määrän edellisen päivän säästöön verrattuna. Kuinka paljon Saaralla olisi rahaa kesäkuun lopussa?

Ratkaisu Kesäkuussa on 30 päivää, joten Saaralla olisi rahaa sentteinä kesäkuun lopussa

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 2^{29}$$

$$= 1 \cdot \frac{1 - 2^{30}}{1 - 2} = 1\,073\,741\,823 \text{ (snt)}$$

| geometrinen summa
| $a_1 = 1,\ q = 2$ ja
| $n = 30$ (termien määrä)
| $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Vastaus 10 737 418,23 €

Tehtäviä

1 Luvut ja laskutoimitukset

1.1 Lukujoukot ja potenssi

101 Laske. a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{6} + \frac{5}{2} - 2 : \frac{1}{2}$ c) $-\frac{2}{7} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right) + 1\frac{3}{5} - \frac{9}{10}$

102 Laske. a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ b) $7 \cdot \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}} : 3$

103 Laske. a) $2 \cdot 3^{-2} + 3^{-1} + 4^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$ b) $(2^{-2})^3 + 2^{-2^3}$ c) $3^{2^3} : (3^{-3})^{-2}$

104 Sievennä. a) $\frac{(2ab)^4}{(4ab^2)^2}$, $a \neq 0, b \neq 0$ b) $\frac{x^2 \cdot 27 \cdot y^4}{9x^3y} \cdot \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{-2}$, $x \neq 0, y \neq 0$

105 Olkoon n luonnollinen luku.

Laske. a) $3^{-n} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{2-2n} \cdot 3^{2-n}$ b) $5^{1-n} \cdot (-5^{n+2}) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$

106 Laske. a) $(-10)^{4n-1} \cdot \left(\frac{10^{-n}}{(-10)^n}\right)^2$, $n \in \mathbb{Z}$ b) $(-a^2 \cdot b^{-1})^n : (ab)^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, b \neq 0$

107 Olkoon $a > 0$ ja $b > 0$. Laske lukujen $-\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$

a) vastalukujen tulo
b) käänteislukujen erotuksen vastaluku kertaa luku ab.

108 Määritä lukujen x ja y käänteislukujen osamäärä, kun $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $y = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ ja $a \neq \pm b$.

109 Tutki, onko luku $\frac{(x-y)^{2n}}{(y-x)^{2n+3}}$ luvun $(y-x)^3$ vastaluvun käänteisluku, kun $x \neq y$ ja n on kokonaisluku.

110 Osoita, että lausekkeen $\dfrac{27^{x+1}}{3^{1-x} \cdot 9^{2x+4}}$ arvo ei riipu muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvosta.

111 Kumpi luvuista 8^{p^2+1} ja 2^{4+3p^2}, $p \in \mathbb{Z}_+$, on suurempi?

112 Esitä desimaaliluku murtolukumuodossa, mikäli mahdollista.
a) 2,345345345… b) 1,23442344423444423…

113 Ilmoita lausekkeen $2^{x^2} + 2^{-x} + 2^{x-2} - a^x$ arvo parametrin a avulla, kun $2^x = a$.

114 Osoita, että jos $x + y + z = 0$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, niin $xy + yz + zx = -\dfrac{1}{2}$. [S00, 5]

115 Juna lähtee Tampereelta klo 8.06 ja saapuu Helsinkiin klo 9.58. Vastakkaiseen suuntaan kulkeva juna lähtee Helsingistä klo 8.58 ja saapuu Tampereelle klo 11.02. Matkan pituus on 187 kilometriä. Oletetaan, että junat kulkevat tasaisella nopeudella, eikä pysähdyksiin kuluvia aikoja oteta huomioon. Laske kummankin junan keskinopeus. Millä etäisyydellä Helsingistä junat kohtaavat, ja paljonko kello tällöin on? [S01, 3]

1.2 Verrannollisuus

116 Viideltä työmieheltä kului aikaa 12 h 30 min tiilikuorman siirtämiseen rakennuksen 4. kerrokseen. Kuinka monta työmiestä olisi tarvittu, jotta urakasta olisi selvitty 7 tunnissa? Missä ajassa 8 työmiestä olisi suorittanut saman työn? Kaikki miehet tekevät työtä samalla teholla.

117 Autoilija ajoi nopeusnäyttötaulun ohi. Auton nopeusmittarin lukema oli 89 km/h, ja näyttötaulun ilmoittama todellinen lukema oli 81 km/h. Hetkeä myöhemmin autoilija ajaa poliisin valvontapisteeseen, joka on nopeusrajoitusalueella 30 km/h. Tällöin auton nopeusmittari näyttää lukemaa 37 km/h. Saako autoilija ylinopeussakon, kun poliisi sakottaa kaikkia, jotka ylittävät sallitun nopeuden vähintään 10 %:lla? Auton nopeusmittarin lukema on suoraan verrannollinen todelliseen nopeuteen.

118 Kappaleen paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Lentokone painaa maan pinnalla 56,0 tonnia. Kuinka paljon se painaa kymmenen kilometrin korkeudessa? Maan pinnan etäisyys keskipisteestä on 6370 kilometriä. [k06, 4].

119 Olkoon R planeetan keskietäisyys Auringosta ja T planeetan vuosi eli aika, jonka kuluessa planeetta kiertää kerran Auringon ympäri. Keplerin kolmannen lain mukaan T:n neliö on suoraan verrannollinen R:n kuutioon. Maan keskietäisyys Auringosta on $1{,}50 \cdot 10^8$ km ja Marsin $2{,}28 \cdot 10^8$ km. Kuinka pitkä on Marsin vuosi?

120 Talon lämmityskustannukset pakkasella ovat suoraan verrannolliset sisä- ja ulkolämpötilojen väliseen erotukseen. Ulkolämpötilan ollessa –2,0 °C ja sisälämpötilan 22,0 °C sisälämpötila pudotetaan 21,0 °C:seen. Kuinka monella prosentilla talon lämmityskustannukset tällöin pienenevät? [s06, 6]

121 Auton polttoainemittari näyttää nollaa, kun säiliössä on 5 ℓ polttoainetta, ja lukemaa 50, kun säiliössä on 48 ℓ. Mittarin lukeman muutos on verrannollinen polttoaineen lisäykseen. Kuinka paljon säiliössä on polttoainetta, kun mittarin lukema on 25? [S88, 2b]

122 Kaasun paine on suoraan verrannollinen kaasun lämpötilaan kelvineinä ja kääntäen verrannollinen kaasun tilavuuteen. Säiliössä olevan kaasun paine on 40 baaria, kun lämpötila on 280 kelviniä (7 °C). Säiliön tilavuus on 20 litraa. Mikä on tämän kaasumäärän tilavuus 20 baarin paineessa ja 300 kelvinin (27 °C) lämpötilassa?

1.3 Prosentti ja prosenttiyksikkö

123 Keittiöremontin arvioidaan maksavan 4700 euroa, josta työn osuus on 37 % ja loppuosa kuluu materiaalikustannuksiin. Työkustannukset nousevat kuitenkin 15 % arvioitua hintaa suuremmiksi, jolloin materiaalit vaihdetaan 8 % halvempaan laatuun. Kuinka monta prosenttia remontin hinta muuttuu?

124 Suomessa kevättalvella syntyvät karhunpennut lisäävät vuosittain karhujen määrää 9,5 %. Tämän jälkeen karhuja on noin 1000 yksilöä. Kuinka monta prosenttia karhuista pitää syksyllä kaataa, jotta Suomen karhukanta pysyisi samansuuruisena?

125 Vuonna 1997 Kaisa oli syntymäpäivänään 25 % vanhempi kuin sisarensa Elisa, ja vuonna 2007 hän oli syntymäpäivänään 15,4 % sisartaan vanhempi. Kuinka paljon Kaisa täytti vuonna 2007?

126 Tietokoneohjelman hinta on arvonlisäveroineen 145 €.

a) Mikä on ohjelman veroton hinta, kun arvonlisäveroprosentti on 22?

b) Kuinka monta prosenttia ohjelman verollinen hinta laskisi, jos arvonlisäveroprosenttia laskettaisiin 5 prosenttiyksikköä?

127 Henkilön palkka nousee kahdesti peräkkäin p %. Tällöin palkan kokonaislisäys on 12,5 %. Määritä p.

128 Kuinka paljon vettä on lisättävä 4 desilitraan 10 % etikkaliuosta, jotta saataisiin 2 %:n vahvuinen etikkaliuos?

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

129 Seuramatkan hinnasta lennon osuus on 50 %. Lennon hinnasta 30 % on polttoainekustannuksia. Polttoaine kallistuu 10 %. Kuinka monen prosentin nousun tämä aiheuttaa matkan kokonaishintaan? [K91, 1b]

130 Tuotteen hintaa alennettiin 12 %. Kuinka monella prosentilla sen myyntiä on lisättävä, jotta siitä saatava myyntitulo pysyisi ennallaan? [K87, 1b]

131 Missä suhteessa on sekoitettava vettä ja viisiprosenttista suolaliuosta, jotta saataisiin kolmeprosenttista liuosta? [S85, 1b]

132 Vuoden 1960 jälkeen on nopeimman junayhteyden matka-aika Helsingin ja Lappeenrannan välillä lyhentynyt 37 prosenttia. Laske, kuinka monta prosenttia keskinopeus on tällöin noussut. Oletetaan, että radan pituus ei ole muuttunut. [S02, 2]

133 Asuinrakennuksesta saadut vuokrat ovat 12 % pienemmät kuin ylläpitokustannukset. Kuinka monta prosenttia vuokria olisi korotettava, jotta ne tulisivat 10 % suuremmiksi kuin ylläpitokustannukset, jotka samanaikaisesti kohoavat 4 %? [K05, 3]

134 Kuutio pienennetään toiseksi kuutioksi siten, että sen kokonaispinta-ala pienenee 36 %. Kuinka monta prosenttia tilavuus pienenee? [S04, 3]

135 Vuonna 2001 erään liikeyrityksen ulkomaille suuntautuvan myynnin arvo kasvoi 10 % vuoteen 2000 verrattuna. Samaan aikaan myynnin arvo kotimaassa väheni 5 %. Tällöin koko myynnin arvo kasvoi 6 %. Laske, kuinka monta prosenttia myynnistä meni vuonna 2000 ulkomaille. [K02, 3]

136 Matkaa kuljetaan tasaisella nopeudella. Kun matkasta on jäljellä 40 %, nopeutta lisätään 20 %. Kuinka monta prosenttia koko matkaan kuluva aika tällöin lyhenee? [S00, 3]

137 Teollisuustuotannon osuus kansatuotteesta on 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia teollisuustuotannon tulisi kasvaa, jotta sen osuus kansantuotteesta nousisi 30 prosenttiin, jos muilla osa-alueilla ei tapahdu muutoksia? [K94, 3b]

138 Kesämökin rakentaminen tuli 25 % arvioitua kalliimmaksi. Rakennustarvikkeet olivat 19 % ja muut kustannukset 28 % arvioitua kalliimpia. Mikä oli rakennustarvikkeiden arvioitu osuus ja mikä lopullinen osuus kokonaiskustannuksista? [K06, 4]

139 Tuoreissa omenissa on vettä 80 % ja sokeria 4 %. Kuinka monta prosenttia sokeria on samoissa omenissa, kun ne on kuivattu siten, että kosteusprosentti on 20? [K00, 4]

140 Hopean ja kuparin seoksesta tehty esine painaa 150 g, ja sen tiheys on 10,1 kg/dm^3. Kuinka monta painoprosenttia esineessä on hopeaa ja kuinka monta kuparia, kun hopean tiheys on 10,5 kg/dm^3 ja kuparin 9,0 kg/dm^3? [S06, 5]

141 Puun rungon halkaisija tyvestä mitattuna kasvaa 20 vuoden aikana kolmasosan alkuperäisestä mitastaan. Samaan aikaan puun korkeus kasvaa kuudesosan alkuperäisestä korkeudestaan. Kuinka monta prosenttia kasvaa puun rungon tilavuus tuona aikana? Oletetaan, että runko on kartion muotoinen. [S05, 5]

142 Päärynämehusta ja omenamehusta tehdyn sekamehun sokeripitoisuus on 11 %. Määritä mehujen sekoitussuhde, kun päärynämehun sokeripitoisuus on 14 % ja omenamehun 7 %. [S03, 5]

143 Kun eräällä paikkakunnalla 80 henkilöä jäi työttömäksi, nousi paikkakunnan työttömyysprosentti 9 prosentista 13 prosenttiin. Kuinka monta työtöntä paikkakunnalla oli tämän jälkeen? [K92, 5b]

1.4 Itseisarvo

144 Esitä lauseke $5 + x|10 + 2x|$ ilman itseisarvomerkkejä.

145 Esitä lauseke $1 - x - 2x|4 - 2x|$ ilman itseisarvomerkkejä.

146 Sievennä lauseke a) $|(-2)^3| - 2|-2|^2 : |-2|^{-1}$ b) $2|-ab|^3 + |a^2b^2| \cdot |-2ab|$, kun $a > 0$ ja $b < 0$.

147 Sievennä lauseke a) $2 \cdot |3\pi - 10| - 20 + 10\pi$ b) $\left|\frac{6x}{3y}\right| - \left|\frac{-3x}{2y}\right|$.

148 Esitä lauseke $|3x + 9| - 3|15 - 5x|$ ilman itseisarvomerkkejä.

149 Sievennä lauseke $\big||2x - 2| - 2\big|$, kun $0 \le x \le 1$.

150 Sievennä lauseke $-|-x|^2 + |a - x^2| - |a - ax|$, kun $a < 0$ ja $0 < x < 1$.

1.5 Juuret ja murtopotenssi

151 Laske. a) $\sqrt{5^2} - \sqrt{4^2} + \sqrt{5^2 - 4^2}$

b) $(\sqrt{12} - \sqrt{24}) \cdot (\sqrt{54} + 2\sqrt{27} + \sqrt{6} - 2\sqrt{3})$

152 Laske. a) $\dfrac{(1 - \sqrt{3})^2}{1 + \sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 6} : \sqrt{2} + 1$

153 Laske. a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[4]{(-2)^6}$ c) $\dfrac{\sqrt[5]{-1} \cdot \sqrt[3]{27}}{\sqrt[4]{4^2}}$

154 Laske. a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ b) $\sqrt[5]{81\sqrt[4]{81}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}}$

155 Laske. a) $\dfrac{3}{1 - \sqrt{3}} \cdot \left(2 - \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}\right) \cdot 2$ b) $(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$

156 Laske lausekkeen $\sqrt{x^2 + 20x + 100}$ tarkka arvo, kun $x = -11\dfrac{1}{11}$.

157 Sievennä lauseke. a) $\dfrac{\sqrt{(a^2 + 1)^4}}{\sqrt{(a^2 + 1)^2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{(1 - 3x)^5}}{1 - 3x}$

158 Sievennä. a) $\sqrt[3]{a^{-2}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$ b) $\left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{x}$

159 Määritä lausekkeen $\sqrt[4]{4} \cdot \left(a^{-3\frac{1}{3}}\right)^{10^{-1}}$ tarkka arvo, kun $a = \sqrt{8}$.

160 Laske $k^{\frac{1}{3}}$, kun $k^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{25}$.

161 Sievennä lauseke $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$, kun $x > 0$, $y > 0$ ja $y = 16x$.

162 Sievennä lauseke $(2 - a^2) \cdot \dfrac{\sqrt{a + \sqrt{2}}}{\sqrt{(\sqrt{2} + a)^3}}$, kun $a > \sqrt{2}$.

163 Sievennä, kun $x > 0$ ja $y > 0$.

a) $(\sqrt[4]{x})^6(\sqrt[4]{x^2} - 3\sqrt[6]{x^3})$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{y^{10}} \cdot \sqrt[5]{y^{10}}}}{\sqrt[12]{y}}$

164 Sievennä seuraavat lausekkeet:

a) $(x^{n-1})^{n-1} \cdot (x^n)^{2-n}$ b) $\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$. [S00, 1]

165 Osoita, että lausekkeen $\sqrt{x^6 - 2x^5 + x^4} - |x^2 - x^3|$ arvo on nolla kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

166 Tutki ilman likiarvoja, pitääkö väite paikkansa.

a) $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 5$ b) $\sqrt{18 - 12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = 3$

167 Osoita käyttämättä likiarvoja, että $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$. [K86, 3a]

168 Kumpi luvuista $\dfrac{ab - a}{\sqrt{a}}$ ja $\sqrt{a^3} + b\sqrt{a}$ on suurempi, kun $a > 0$?

1.6 Polynomin jakaminen tekijöihin

169 Sievennä rationaalilauseke. a) $\dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x}$ b) $\dfrac{2x^2 - x - 4x^3 + 2x^2}{x - 2x^2}$

170 Sievennä rationaalilauseke. a) $\dfrac{1 - x - 12x^2}{6x^2 - x - 1}$ b) $\dfrac{12x^2 - 8 - 15x^3 + 10x}{5x - 4}$

171 Laske. a) $\dfrac{4}{x^2 - 1} + \dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1}$ b) $\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}\right) \cdot x - 3\left(x - \dfrac{3}{x}\right) \cdot \dfrac{x}{9}$

172 Laske. a) $\left(1 - \dfrac{b}{2a - b}\right) \cdot \left(\dfrac{a^2}{a - b} - a + b\right)$ b) $\dfrac{\dfrac{a + 2}{a + 1} - 2}{a} + 1$

173 Sievennä lausekkeet a) $\sqrt{3\dfrac{3}{4}} \Big/ \sqrt{1\dfrac{2}{3}}$ b) $\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2\right) \Big/ \left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right)$. [K03, 1]

174 a) Olkoon $a \neq 0$, $b \neq 0$. Sievennä: $\dfrac{a + \dfrac{b^2}{a}}{b + \dfrac{a^2}{b}}$.

b) Osoita, että $x^2 - y^2 = 1$, kun $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)$, $t \neq 0$.
[S02, 4]

175 Polynomi $P(x) = ax^2 + 6x - 45$ on jaollinen binomilla $x + 5$.

a) Määritä parametri a. b) Sievennä $\dfrac{P(x)}{x + 5}$.

176 Määritä parametri a ja sievennä lauseke, kun tiedetään, että nimittäjä on osoittajan tekijä.

a) $\dfrac{4x^2 - 12x + a}{2x - 3}$ b) $\dfrac{2x^3 - x^2 + ax - 2}{2x - 1}$

177 Esitä polynomi $P(x) = ax^2 + bx + b$ tulomuodossa, kun $P(-1) = 4$ ja $P(1) = 0$.

178 Kolmannen asteen polynomin nollakohdat ovat $x = 1$, $x = -2$ ja $x = \frac{1}{2}$. Lisäksi polynomin kuvaaja $y = P(x)$ kulkee pisteen $(-1, 6)$ kautta. Määritä polynomi $P(x)$.

179 Polynomi $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jaollinen binomilla $x^2 - 1$. Lisäksi on $P(2) = 12$. Määritä $P(x)$. [K02, 5]

180 Olkoon n luonnollinen luku. Osoita, että polynomi $P(x) = nx^{n+1} + (n + 1)x^n + x^{n-1}$ on jaollinen binomilla $x + 1$.

181 Viidennen asteen polynomilla $P(x)$ on nollakohta $x = 0$ sekä kaksinkertaiset nollakohdat $x = -1$ ja $x = 2$. Määritä polynomi $P(x)$ tulomuodossa, kun $P(1) = -20$.

182 Kun polynomi $P(x) = 2x^2 - ax - 4$ jaetaan binomilla $2x + 1$, saadaan jakojäännökseksi -3. Määritä parametri a.

183 Kun polynomi $P(x) = x^3 + 2ax^2 - 3ax$ jaetaan binomilla $x - 2$, saadaan jakojäännökseksi 4. Tutki, onko polynomi $P(x)$ jaollinen binomilla $1 - x^2$.

2 Yhtälöt ja epäyhtälöt

2.1 Polynomiyhtälö ja -epäyhtälö

ENSIMMÄINEN ASTE

201 Ratkaise yhtälö.

a) $3x + 8 = x - 4(x - 2)$ b) $\frac{2x}{3} - \frac{3x - 1}{2} = 18$ c) $4x + 2 = 3 + 2(2x - 5)$

202 Ratkaise epäyhtälö.

a) $x + 2(4 + x) \leq 5x + 8$ b) $\frac{x}{3} - \frac{5}{2} < \frac{5x}{6}$ c) $\frac{x}{10} - \frac{1}{6} \leq \frac{x}{6} - \frac{x}{15}$

203 Ratkaise yhtälö $5(3x + 1) - 4(3 - 2x) = 2x$. Tutki, toteuttaako tämä ratkaisu myös yhtälön $27x^3 - 54x + 17 = 0$. [s03, 2]

204 Eräissä maissa käytetään lämpötilan mittaamisessa fahrenheitasteikkoa. Fahrenheitmittarin lukema f muunnetaan kaavalla $c = \frac{5}{9}(f - 32)$ celsiusmittarin lukemaksi c. Kuinka korkea kuume ihmisellä on fahrenheitasteina, jos lukema celsiusasteina on 38,2? Missä lämpötilassa celsiusmittari ja fahrenheitmittari osoittavat samaa lukemaa? [k01, 1]

205 Sisarukset Kaisa ja Elisa sijoittivat yhtä suuren rahamäärän eri yhtiöiden osakkeisiin. Pörssikurssien muutosten vuoksi Kaisan osakkeiden arvo oli noussut vuodessa kolmasosalla. Samanaikaisesti Elisan osakkeiden arvo oli tullut viidesosan pienemmäksi kuin Kaisan osakkeiden arvo. Kuinka moninkertaiseksi alkuperäisten sijoitusten yhteinen arvo kasvoi, kun se oli 600 euroa lähtötilannetta suurempi?

206 Pekka kävelee neljä kilometriä tunnissa ja hölkkää kuusi kilometriä tunnissa. Hölkätessään kouluun hän käyttää 3 min 45 s vähemmän aikaa kuin kävellessään sinne. Määritä Pekan koulumatkan pituus. [k98, 3a]

207 Henkilöauto, jonka nopeus on 100 km/h, ryhtyy ohittamaan edessään olevaa nopeudella 80 km/h ajavaa henkilöautoa. Ohittaja siirtyy vasemmalle kaistalle ollessaan 40 metrin päässä ohitettavasta ja palaa oikealle kaistalle 60 metrin päähän ohitettavan eteen. Kuinka pitkän matkan ohittaja ajoi vasemmalla kaistalla, ja kuinka kauan tämä ohitus kesti? Autojen pituuksia ei oteta huomioon. [s03, 11]

TOINEN ASTE

208 a) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{3}x^2 - x + 2 = \frac{4}{3}$.

b) Ratkaise x yhtälöstä $x^2 - ax - a^2 = 0$. [K05, 1b]

209 Ratkaise epäyhtälö a) $3x^2 - 18 \le 0$ b) $2 - x < 3(2 - x)^2$.

210 a) Laske yhtälön $5x^2 - 2x - 3 = 0$ juurten käänteislukujen summa.

b) Millä muuttujan x positiivisilla arvoilla epäyhtälö $x^2 + 2x \le 15$ toteutuu?

211 Ratkaise yhtälö $10^4 \cdot (x^2 - 1) = x - 1$. [S93, 3a]

212 Määritä lausekkeen $(3^x)^y - \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^y$ tarkka arvo, kun x ja y ovat yhtälön $x^2 + 2x - 1 = 0$ juuret. [K82, 4]

213 Yhtälössä $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ korvataan luku a luvulla $a + 1$. Miten muuttuvat yhtälön juuret? [K96, 2b]

214 Ratkaise kaksoisepäyhtälö $(x - a)^2 < (x + a)^2 < (x - a)(x + a) + 4a^2$, kun a on negatiivinen reaaliluku.

DISKRIMINANTTI

215 Tutki yhtälön $x^2 + ax = 4x + 2a - 5$ reaalijuurten lukumäärää parametrin a eri arvoilla.

216 Millä vakion a arvoilla funktio P: $P(x) = x^2 + 4x + a$ ei saa negatiivisia arvoja? [K85, 2]

217 Millä a:n arvoilla yhtälön $x^2 + (3a + 1)x + 81 = 0$ juuret ovat reaaliset? [K88, 3]

KORKEAMPI ASTE

218 a) Ratkaise yhtälö $(5 - x)(x - 3)(x + 1) = 0$.

b) Ratkaise epäyhtälö $(5 - x)(x - 3)(x + 1) > 0$.

219 Olkoon $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ja $g(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$.
a) Laske $f(-2)$.

b) Laske $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$. [k04, 1]

220 Ratkaise epäyhtälö. a) $x^3 < x^2$ [S04, 1c] b) $x^3 - 5x^2 \le 3x - 15$

221 Ratkaise epäyhtälö $9 - x^4 \ge x^2 + 3$.

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

222 Ratkaise yhtälö. a) $x - 2(2x - 3) = 3(2 - x)$ b) $\frac{x+2}{3} = \frac{x}{2} - \frac{x+5}{6}$

223 Ratkaise epäyhtälö $ax - b^3 > bx - a^3$ kaikilla parametrien a ja b arvoilla.

224 Millä parametrin a arvoilla lauseke $3x^2 - ax^2 - 2x + 3 + a$ saa vain positiivisia arvoja?

225 Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 + 2x^2 - \sqrt{15}\,x + 3a = 0$ on kaksi eri suurta reaalijuurta?

226 Laske yhtälön $5x^2 - 2x + 3 = 0$ juurten käänteislukujen summa.

227 Millä muuttujan x arvoilla lauseke $\frac{1}{\sqrt{x^3 - x^5}} + \sqrt{x^5 - x^4 - 16x + 16}$ on määritelty?

228 a) Ratkaise yhtälö $x^6 + 7x^3 = 8$. b) Ratkaise epäyhtälö $x^6 + 7x^3 < 8$.

229 Määritä sellaiset luvut a, että yhtälöllä $ax^2 - a = x^3 - 1$ on täsmälleen kaksi eri reaalijuurta.

230 Ratkaise yhtälö.

a) $2(x - 1) + 3(x + 1) = -x$ [S05, 1a]

b) $\frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\right)$ [k07, 1a]

231 Ratkaise yhtälö $x\left(x - \frac{7}{10}\right) = \frac{1}{10} - x$. [k01, 2]

232 Olkoon $a \neq b$. Ratkaise yhtälö $(a-b)x^2 + ax + b = 0$. [S01, 2]

233 Ratkaise täydellisesti yhtälö $ax + b = 0$, jossa a ja b ovat reaalilukuja. Huomaa kaikki erikoistapaukset. [k98, 5b]

234 Millä a:n arvoilla yhtälöllä $(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x - (a^2 - a) = 0$ on enemmän kuin kaksi ratkaisua? [S94, 5a]

235 Luku x toteuttaa ehdot $1 - 3 \cdot 10^{-15} < x < 1 + 3 \cdot 10^{-15}$. Osoita, että tällöin on $1 - 6 \cdot 10^{-15} < x^2 < 1 + 7 \cdot 10^{-15}$. [K86, 6a]

236 Nikon autosta on bensiini loppunut, ja hän on lähtenyt kävelemään tietä pitkin noutaakseen bensiiniä lähimmältä huoltoasemalta. Kun hän on kävellyt 46 minuuttia, hänen ohitseen ajaa polkupyörällä Jasmine, joka kertoo käyvänsä huoltoasemalla ja lupaa samalla tuoda Nikolle kanisterissa bensiiniä. Niko kääntyy kävelemään takaisin autolle. Kun hän on kävellyt 38 minuuttia, Jasmine tuo hänelle bensiinikanisterin. Bensiinin osto huoltoasemalla oli kestänyt 7 minuuttia. Kuinka kaukana huoltoasema oli Nikon pysähtyneestä autosta, kun Niko kävelee 5 km tunnissa ja Jasmine pyöräilee 15 km tunnissa? Anna vastaus 100 metrin tarkkuudella. [s05, 8]

237 Strutsien kasvattaja haluaa tilapäisesti vuokrata eläinten jaloitteluun peltoa. Pellosta pyydetään vuokraa 128 € hehtaarilta. Alue tulee lisäksi aidata, ja aitakustannukset ovat 0,20 € aitametriltä. Strutsifarmari on varannut tarkoitukseen 550 euroa. Kuinka suuren aidalla ympäröitävän neliönmuotoisen peltoalan hän pystyy vuokraamaan? [s04, 8]

238 Kaava $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ on yleensä väärä. Osoita, että jos kaava pätee, niin joko $x = 0$ tai $y = 0$ (tai molemmat). Myös kaava $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ on yleensä väärä. Anna esimerkki luvuista x ja y, joille tämä kaava pätee, mutta edellinen kaava ei päde. [k06, 12]

2.2 Rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö

239 Sievennä lauseke $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ ja laske sen arvo, kun $x = -\sqrt{2}$.

240 Ratkaise yhtälö.

a) $x + 2 = \dfrac{1}{x - 2}$ [S05, 1b] b) $\dfrac{x^2 - 9}{3 + x} + 3 = x$ c) $\dfrac{3x}{x - 5} = \dfrac{3x - 5}{x}$

241 Ratkaise yhtälö. a) $\dfrac{4+x}{9+4x} = x$ b) $3 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{2x^2 - x}$

242 Ratkaise epäyhtälö. a) $\dfrac{2x-6}{4x-8} > 0$ b) $\dfrac{2x-6}{4x-8} \geq 1$

243 Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x^3 - x}{x} < 1$.

244 Ratkaise epäyhtälö. a) $\dfrac{5+x^2}{x} > \dfrac{5x-13}{3}$ b) $\dfrac{2x}{2x+3} \leq \dfrac{2x+1}{8}$

245 Ratkaise epäyhtälö. a) $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{2x}{x+3}$ b) $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{3}{5x^2+10}$

246 Lukion jazzyhtyeen konsertin tuotto 192 euroa (€) on jaettava tasan yhtyeen jäsenille. Jos jäseniä olisi 2 enemmän, jokainen saisi 8 € vähemmän. Montako jäsentä yhtyeessä on? [K00, 2]

247 Osoita, että $(a-b)\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right) > -4$, kun $a > 0$ ja $b > 0$.

2.3 Itseisarvoyhtälö ja -epäyhtälö

248 Ratkaise yhtälö. a) $|2x+1| = 5$ b) $|2x+1| = |5x|$ c) $|2x+1| = 5x$

249 Ratkaise yhtälö.
a) $|6x+9| - 3|x-2| = 0$ b) $|3-x| - 2x = 3$ c) $x|x| + 2x + 1 = 0$ [K97, 2]

250 Ratkaise. a) $|4x+1| - |3x-6| = 0$ b) $|4x+1| - |3x-6| < 0$

251 Ratkaise epäyhtälö. a) $|x-1| > |x-2|$ b) $|2x+1| > |x-3|$

252 Ratkaise epäyhtälö.
a) $|3x-1| \leq 5$ b) $x + 3 \leq |2x+4|$ c) $|5x+4| < 3x + 12$

253 Ratkaise epäyhtälö. a) $|5x+8| < 4 - x$ b) $-x^2 - 2x \leq |2x+3| + x^2$

254 Ratkaise yhtälö $|x+1| - |x-3| + 5x = 2$.

255 Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla x on voimassa $|x+1| - |2-x| \leq 5$.

2.4 Neliöjuuriyhtälö ja -epäyhtälö

256 Ratkaise yhtälö $\sqrt{1-4x} = 2x + 1$.

257 Ratkaise yhtälö $(\sqrt{1-2x} + 1)^2 = 16$. [S94, 1]

258 Ratkaise yhtälö. a) $x - \sqrt{3x-3} = 1$ b) $\sqrt{4+x} - 1 = \sqrt{x+2}$

259 Ratkaise yhtälö $8x + 2\sqrt{1-x} = 5$. [S88, 1a]

260 Ratkaise yhtälö $\sqrt{x-2} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$. [S00, 2]

261 Ratkaise yhtälö $\sqrt{2x+3} = \dfrac{|x|}{\sqrt{x+2}}$.

262 a) Sievennä lauseke $\dfrac{\frac{1}{x} - x}{\frac{1}{x} + 1}$.

b) Sievennä lauseke $\dfrac{x-1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$.

c) Ratkaise tämän jälkeen yhtälö $\dfrac{\frac{1}{x} - x}{\frac{1}{x} + 1} = \dfrac{x-1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$. [K00, 3]

263 Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{2x-1} < |x|$. [S85, 2]

264 Ratkaise epäyhtälö. a) $\sqrt{1+x^2} \geq x + 4$ b) $\sqrt{1+x^2} < x + 4$

265 Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{1-2x} \geq 1 - x$. [S90, 5]

266 Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{x^2-4} > x - 1$.

2.5 Trigonometriset yhtälöt

TRIGONOMETRIAN PERUSKÄSITTEITÄ

267 Tiedetään, että $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $180° < x < 270°$. Määritä $\cos x$ ja $\tan x$ (tarkat arvot). [K05, 2b]

268 Kulma α on välillä $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ ja $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$. Määritä a) $\sin\alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\sin 2\alpha$ d) $\sin 3\alpha$.

269 Osoita, että $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

270 Tutki, onko yhtälöllä $\sin x + \cos x = 1{,}41422$ reaalijuuria. [K93, 6a]

271 Olkoon annettuna trigonometrian kaavat $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ja $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$. Osoita pelkästään näiden perusteella oikeiksi seuraavat kaavat:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

Ilmoita, mitä kaavaa olet missäkin laskun vaiheessa käyttänyt. [S04, 8]

272 Määritä lausekkeen $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ tarkka arvo, kun $\tan x = 2$. [S82, 9b]

273 Osoita oikeaksi kaava $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$. Osoita tämän nojalla, likiarvoja käyttämättä, että $x = \cos\frac{\pi}{9}$ on kolmannen asteen yhtälön $8x^3 - 6x - 1 = 0$ juuri. [S81, 7a]

TRIGONOMETRISET YHTÄLÖT

274 Ratkaise yhtälö.

a) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x = 0$ c) $\cos x = \sqrt{3}\sin x$ [S91, 4]

275 Ratkaise yhtälö. a) $\sqrt{3}\sin x - 2\sin^2 x = 0$ b) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ [S89, 3]

276 Ratkaise yhtälö $5 - 6\sin x = \cos 2x$.

277 Määritä x, kun $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$ ja $-\pi < x < \pi$.

278 Ratkaise yhtälö $\sin 2x - \tan x = 0$. [S78, 5b]

279 Ratkaise yhtälö.

a) $\sin 2x + \sin 3x = 0$

b) $\cos x + \cos 5x = 0$

c) $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

280 Ratkaise yhtälö.

a) $\sqrt{2}\tan\left(\frac{x+1}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$

b) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \tan(\pi - x) = 0, \ 0 \le x \le 2\pi$

2.6 Yhtälöryhmä

281 Ratkaise yhtälöryhmä $x + y = a, \ x - y = 2a$. [K05, 2a]

282 Ratkaise yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ 5x - 6y + 10 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 6y = 7 \\ -18x + 36y + 42 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{1}{7}x - 2 \\ 14y - 2x = 1 \end{cases}$

283 Lasten palikkasarjassa on kolmen värisiä puupalikoita, punaisia, vihreitä ja sinisiä. Eriväriset palikat ovat pituudeltaan erilaisia. Palikoista voidaan rakentaa 50 cm:n pituinen jono esimerkiksi asettamalla peräkkäin 7 punaista ja 1 vihreä palikka. Yhtä pitkä jono saadaan aikaan myös asettamalla peräkkäin 5 vihreää ja 2 sinistä palikkaa tai esimerkiksi 4 punaista, 2 vihreää ja 2 sinistä palikkaa. Minkä pituisia palikat ovat?

284 Eräs kirjakauppa myy CD-ROM-sanakirjaa, tietosanakirjaa ja levyasemaa seuraavin pakettihinnoin: Sanakirja ja levyasema 9 000 mk, tietosanakirja ja levyasema 8 200 mk, sanakirja, tietosanakirja sekä levyasema 12 000 mk. Mikä on tämän mukaan levyaseman hinta? [K90, 4]

285 Henkilö antaa kolmelle ystävälleen yhden joululahjan kullekin, ja käyttää tähän yhteensä 1000 markkaa. Mikään lahja ei saa maksaa enempää kuin kaksi kertaa kumpi tahansa muista lahjoista. Kuinka paljon kallein lahja voi enintään maksaa? Jos kaksi lahjaa on yhtä kallista, paljonko ne enintään maksavat? [S91, 6b]

286 Ratkaise yhtälöpari $x + y + a = 0$, $x + ay + 1 = 0$ vakion a kaikilla arvoilla. [s84, 6a]

287 Määritä kaikki kokonaislukuparit (m, n), jotka toteuttavat yhtälön $(m + 2n + 1)(m - n + 2) = 5$. [S94, 8]

3 Geometria

3.1 Tasogeometria

MONIKULMIO

301 Säännöllisen kuusikulmion sivun pituus on 8. Laske kuusikulmion
a) kulma b) keskipisteen etäisyys sivusta c) pisimmän lävistäjän pituus
d) ala.

302 Säännöllisen viisikulmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 12,0 cm. Laske viisikulmion sivun pituus.

303 Millä monikulmiolla lävistäjien lukumäärä on suurempi kuin sivujen lukumäärä?

KOLMIO

304 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 4 ja 6.
a) Laske hypotenuusan pituus. Ilmoita tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.
b) Määritä kolmion kulmat 0,01 asteen tarkkuudella.
c) Määritä kolmion ala. [S05, 2]

305 Suunnistaja lähti 1350 m:n päässä olevalle rastille suuntaan, joka poikkesi 4° rastin suunnasta. Kuinka kaukana rastista suunnistaja oli juostuaan suoraan 1350 m?

306 Kolmion kulmat ovat 60° ja 45°, ja 45°:n kulman vastaisen sivun pituus on $\sqrt{2}$. Laske 60°:n kulman vastaisen sivun pituus.

307 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 15 cm ja piiri 36 cm. Määritä kateettien pituudet. [K06, 3]

308 Kolmion sivujen pituudet ovat 7, 13 ja 16.
a) Määritä pienin kulma 0,1°:n tarkkuudella.
b) Laske kolmion pinta-alan tarkka arvo.

KOLMION MERKILLISET PISTEET

309 Kolmion mediaanin pituus on 81. Kuinka pitkiin osiin mediaanien leikkauspiste jakaa sen?

310 Tasasivuisen kolmion ympäri piirretään ympyrä, joka kulkee kolmion kärkipisteiden kautta. Kolmion sisään asetetaan toinen ympyrä siten, että se sivuaa kolmion sivuja. Kuinka monta prosenttia edellisen ympyrän ala on suurempi kuin jälkimmäisen ympyrän ala? [K03, 2]

311 Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 6 ja 8. Laske kolmion painopisteen etäisyys hypotenuusasta.

312 Kolmion sivut ovat 4,4 cm, 4,7 cm ja 5,4 cm. Kuinka pitkä on kolmion i) sisään ii) ympäri piirretyn ympyrän säde?

NELIKULMIO

313 Neliön sisään piirretään neliö, jonka kärjet ovat ulomman neliön sivujen keskipisteissä. Mikä on neliöiden pinta-alojen suhde?

314 Neljäkkään sivu on tasan 5 cm, ja lävistäjien pituuksien suhde on 2:1. Laske neljäkkään ala. [S03, 2]

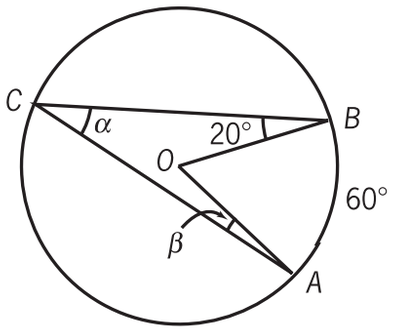
315 Suunnikkaan kaksi vierekkäistä sivua ovat 3 ja 5 sekä niiden välinen kulma 60°. Laske suunnikaan pidemmän lävistäjän pituus.

316 Puolisuunnikkaasta tunnetaan sen pisin sivu 19, lyhin sivu 6, korkeus 7 ja terävä kulma 60°. Lävistäjä jakaa puolisuunnikkaan kahteen osaan. Mikä on näiden osien alojen suhde?

317 Suorakulmion sivujen suhde on 4:9 ja pinta-ala on 36. Laske suorakulmion lävistäjän pituus.

YMPYRÄ

318 Oheisen ympyrän säde on 5. Laske
a) pienemmän sektorin AOB ala
b) kulmat α ja β
c) jänteen CB pituus.



319 Annetun ympyrän pinta-ala on A. Mikä on ympyrän ympäri piirretyn neliön ala? Entä ympyrän sisään piirretyn neliön ala? [S06, 3]

320 Ympyrän säde on 8. Laske 45°:n keskuskulmaa vastaavan segmentin pinta-ala.

321 Missä kulmassa 1250 km:n korkeudella Maan pinnasta sijaitseva satelliitti näkee maapallon? Maan säde on 6400 km.

322 Lammen rannalla istuva Onki-Konsta katselee pitkänomaista saarta ja tuumii, että matka saaren keskikohdasta onkijan istumakivelle on puolet saaren pituudesta.
a) Missä kulmassa Onki-Konsta näkee saaren?
b) Kuinka kaukana on saaren etäisempi pää, kun Onki-Konstan virvelin 58 metrin pituinen siima ylettyy juuri ja juuri saaren lähempään kärkeen ja saaren pituus on 97 metriä?

YHDENMUOTOISUUS

323 Tasasivuisen kolmion muotoisen kukkapenkin sivu on 18 metriä. Kukkapenkin poikki rakennetaan polku sivun suuntaisesti 4,5 metrin päähän sivusta. Kuinka pitkä polku on?

324 47 metriä pitkästä purjelaivasta on tehty pienoismalli mittakaavassa 1:40. Laivan maston pituus on 29 metriä ja suurimman purjeen pinta-ala 23 m^2. Laske pienoismallin maston pituus ja suurimman purjeen ala.

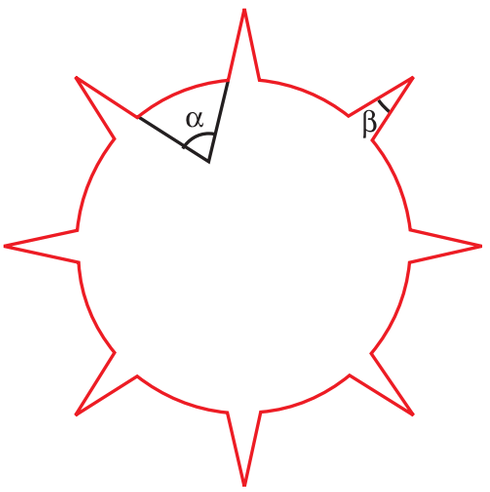
325 Maastokartan mittakaava on 1:50 000. Kartalle piirretyn eräkämpän pituudeksi mitattiin kartalta 2,4 mm.
a) Kuinka pitkä rakennus on tämän mukaan todellisuudessa?
b) Mikä on kämpän pinta-ala kartan mukaan todellisuudessa, kun kartalta mitattuna se on 4,1 mm^2?
c) Kuinka pitkäksi rakennus pitäisi piirtää kartalle, jotta kartta vastaisi todellisuutta, kun kämpän pituus on 6,9 metriä?

326 Kokoa 128 cm olevaan villapaitaan kului lankaa 380 g. Kuinka paljon lankaa kuluu kokoa 158 cm olevaan villapaitaan, kun paidat ovat keskenään yhdenmuotoiset ja tarvittava langan määrä on suoraan verrannollinen paidan pinta-alaan?

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

327 Tasakylkisen kolmion piiri on 15 cm. Sen kyljet ovat 1,5 cm pitemmät kuin kanta. Laske kolmion ala. [K00, 1]

328 Määritä oheisessa symmetrisessä kuviossa kulma α, kun kulma β on 25°.



329 Tasasivuisen kolmion sivu on a. Laske kolmion korkeus ja ala.

330 Kolmion kaksi kulmaa ovat 30° ja 45° sekä näiden välisen sivun pituus 18. Laske a) kolmion muiden sivujen pituus b) kolmion ala. Ilmoita tarkka arvo ja likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

331 Puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut ovat 26 ja 76 sekä muut sivut 30 ja 40. Laske puolisuunnikkaan ala.

332 Laske ympyrän sisään ja ympäri piirrettyjen säännöllisten 8-kulmioiden alojen suhde.

333 Kolmion sivujen pituudet ovat $a - 1$, a ja $a + 1$. Määritä a siten, että kolmio on suorakulmainen. Määritä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. [S04, 2]

334 Suorakulmaisen kolmion ABC terävän kulman B puolittajan BD pituus on $\frac{8\sqrt{10}}{3}$. Laske kateetin AC pituus, kun $DC = \frac{10}{3}$ ja hypotenuusa $BC = 10$.

335 Kaksi matkapuhelinmastoa näkyy paikkaan, jonka etäisyys toisesta mastosta on 5,27 km ja toisesta 3,16 km. Tähtäyssuunnat mastoihin muodostavat 72° 50′ suuruisen kulman. Kuinka etäällä mastot ovat toisistaan? Etäisyydet mitataan vaakasuorasti, eikä maaston mahdollisia korkeuseroja oteta huomioon. [K00, 5]

336 Tasaisella maanpinnalla sijaitsevan tornin huippu näkyy eräästä paikasta katsottuna 3,5 asteen kulmassa vaakasuoraan tasoon nähden. Tasan puoli kilometriä kauempaa katsottuna kulma on 2,5 astetta. Mikä on tornin korkeus, ja mitkä ovat katseluetäisyydet? [S00, 4]

337 a) Ympyrälle piirretään säteen pituinen jänne, joka jakaa ympyrän kehän kahteen kaareen. Määritä kaaria vastaavat kehäkulmat.
b) Ympyrän halkaisija jakaa jänteen osiin, joiden pituudet ovat 4 ja7. Kuinka suuriin osiin tämä jänne jakaa halkaisijan, kun ympyrän säde on 10?

338 Kolmion painopisteen kautta piirretään kannan suuntainen suora. Missä suhteessa suora jakaa kolmion alan?

339 Rantakaavassa määrätään, että 100 m lähemmäksi rantaa ei saa rakentaa. Kaava-alueella on tasasivuisen kolmion muotoinen saari, jonka pinta-ala on 5,00 ha. Saako sille rakentaa? [K95, 5b]

340 Ympyrän pisteestä A piirretään keskenään yhtä pitkät jänteet AB ja AC, joiden välinen kulma on 90°. Jänteet jakavat ympyrän kolmeen osaan. Laske näistä suurimman osan pinta-alan suhde koko ympyrän alaan.

341 Kolmion kulman suuruus on α ja sen vastaisen sivun pituus 5; toisen kulman suuruus on 2α ja sen vastaisen sivun pituus 8. Laske kolmion kolmannen sivun tarkka pituus ja määritä α asteen kymmenesosan tarkkuudella. [S02, 6]

342 Talosta 4 metrin korkeudelta katsottaessa linkkimaston huippu näkyy 25 asteen korkeuskulmassa ja 12 metriä korkeammalta katsottaessa 22,5 asteen korkeuskulmassa vaakatasoon nähden. Maston perusta on 21 metriä korkeammalla kuin talon perusta. Määritä maston korkeus 0,1 metrin tarkkuudella. [K04, 6]

343 Nelikulmion muotoisen tontin kolme peräkkäistä kulmaa ovat mittausten mukaan 70°, 125° ja 110°; näiden välisten rajalinjojen pituudet ovat (samassa järjestyksessä) 88 metriä ja 120 metriä. Kuinka suuri on tontin neljäs kulma? Mitkä ovat tontin kahden muun sivun pituudet? Ilmoita pituudet metrin tarkkuudella. [S06, 7]

344 Suorakulmion muotoisten paperiarkkien koko ilmoitetaan yleensä DIN-järjestelmän avulla. Paperiarkkien koko ilmoitetaan tällöin käyttäen lyhenteitä A0, A1, A2, A3 jne. Paperiarkkien sivujen suhteet on kiinnitetty siten, että kun arkki puolitetaan lyhyemmän sivun suuntaisesti, puolikkaat ovat yhdenmuotoisia alkuperäisen arkin kanssa. Lähtökoko on A0, ja sen pinta-ala on 1 m^2. Laske A4-kokoisen arkin sivujen pituudet.

345 Suora ja ympyrä leikkaavat siten, että ympyränkaari jakautuu kahteen osaan suhteessa 1:2. Määritä suoran erottamien ympyrän osien alojen suhde. [S95, 5b]

346 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan suhteessa 3:7. Määritä kateettien pituuksien suhde. [K04, 7]

347 Suorakulmion pinta-ala on 30 m^2 ja piiri enintään 24 m. Mitä arvoja suorakulmion sivujen pituudet voivat saada? [K02, 7]

348 Osoita, että suunnikas on neljäkäs, jos sen lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

349 Osoita, että kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

missä a on kolmion mielivaltainen sivu ja α sen vastainen kulma. [S03, 9]

3.2 Avaruusgeometria

MONITAHOKAS

350 Kuution muotoisen säiliön tilavuus on 8000 litraa. Laske a) kuution särmä b) kuution pinta-ala c) kuution avaruuslävistäjän pituus.

351 Laske kuution samasta kärjestä lähtevien avaruuslävistäjän ja särmän välinen kulma.

352 Säännöllisen tetraedrin muotoisen mehutölkin tilavuus on 2,0 dl. Laske tölkin sivusärmän pituus.

353 Laske säännöllisen oktaedrin avaruuslävistäjän pituus, kun särmän pituus on 39,0 cm.

LIERIÖ

354 Suorakulmion muotoisesta levystä valmistetaan suora lieriö, jonka korkeus ja pohjien halkaisijat ovat yhtä suuret kuin alkuperäisen levyn korkeus 60,0 cm. Kuinka paljon levyä vähintään tarvitaan? Mikä on saadun lieriön tilavuus?

355 Suoran ympyrälieriön muotoiseen astiaan kaadetaan 5,0 l vettä. Tällöin veden korkeus astiassa on 22 cm. Laske pohjan halkaisija. [K97, 1]

356 Akvaario on muodoltaan kannellinen suorakulmainen särmiö. Akvaarion pituus on 64 cm, leveys 42 cm ja korkeus 48 cm. Akvaario on valmistettu lasista, ja sen reunoja kiertää alumiinilista. Laske
a) akvaarion tilavuus
b) akvaarioon tarvittu lasimäärä neliömetreinä
c) tarvittu alumiinilistan määrä
d) akvaarion avaruuslävistäjä.

357 Betonista valetun lattialaatan paksuus on 25 cm. Ilmastointia varten siihen porataan timanttiporalla pyöreä reikä, jonka halkaisija on 14 cm. Reikä porataan vinoon siten, että poraussuunta muodostaa 30°:n kulman lattiatasoon nähden. Laske pois poratun betonin massa, kun betonin tiheys on 2500 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

358 Suoran ympyrälieriön sisään asetetaan säännöllinen nelisivuinen särmiö siten, että pohjien keskipisteet yhtyvät. Määritä tilavuudeltaan suurimman särmiön tilavuus, kun lieriön pohjan säde on 1 ja korkeus 2.

KARTIO

359 Suoran ympyräkartion muotoisen jäätelötuutin tilavuus on 1,8 dl ja korkeus 14 cm. Jäätelötuutin päällysteenä (vaippa) on alumiinipintainen paperi ja kantena pahvinen ympyrä.
Laske a) kannen halkaisija b) alumiinipintaisen paperin pinta-ala.

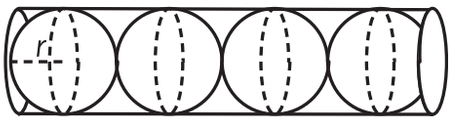
360 Nelisivuisen pyramidin sivusärmän pituus on 10,0 cm ja pohjan sivu 6,0 cm. Laske pyramidin korkeus ja tilavuus.

361 Ville käyttää kärjellään seisovaa suoraa ympyräkartiota sademittarina. Kartion korkeus on 18,0 cm ja pohjan säde 6,0 cm. Sateella kartiomittarin pohjalle kertyi 36 mm:n kerros vettä. Mikä oli todellinen sademäärä?

PALLO

362 Pallon tilavuus on 50,3 cm^3. Laske pallon pinta-ala.

363 Täysinäisessä tiiviisti pakatussa ympyrälieriön muotoisessa säilytyskotelossa on neljä tennispalloa. Kuinka suuri osa pallojen tilavuus on kotelon tilavuudesta? [k01, 3]



364 Maa voidaan ajatella palloksi, jonka ympärysmitta on 40 000 km. Laske tämän perusteella 70. leveyspiirin pituus.

365 Voidaanko koko Suomi nähdä 50 km:n korkeudesta? Suomi on 1160 km pitkä ja maapallon säde on 6370 km.

366 Tinakuutio sulatetaan ja siitä valmistetaan neljä keskenään yhtä suurta kuulaa. Kuinka monta prosenttia pinta-ala muuttuu?

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

367 Suorakulmaisen särmiön muotoisen veistoksen leveys on 2,00 m, pituus 1,00 m ja korkeus 3,00 m. Veistoksesta tehdään pienoismalli, jonka tilavuus on sadasosa alkuperäisen veistoksen tilavuudesta. Mitkä ovat pienoismallin mitat? [s98, 6]

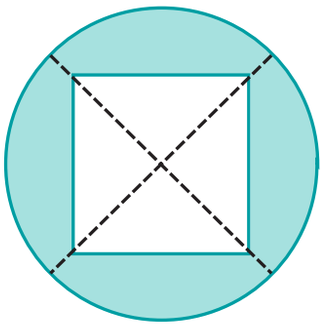
368 Suoran ympyrälieriön muotoisen litran mitan korkeus on 15 cm. Kuinka suuri on samanmuotoisen puolen litran mitan pohjan halkaisija? [K02, 4]

369 Suoran ympyräkartion muotoisen jäätelötuutin korkeus on $h = 16$ cm ja yläosan (kartion pohjan) halkaisija $d = 6$ cm. Tuutin ympärille kartion vaipaksi kierretään ympyränsektorin muotoinen suojapaperi. Laske sektorin säde r ja keskuskulma α, kun suojapaperi on kaikkialla yksinkertainen (myöskään liimausvaraa ei oteta huomioon). Vastaukset yhden millimetrin ja yhden asteen tarkkuudella. [K01, 5]

370 Pyöreän teräsputken halkaisija on 40,0 mm. Onton sisäosan poikkileikkaus on neliö, jonka sivu on 24,0 mm.

a) Laske putken seinämän suurin ja pienin paksuus.

b) Määritä 2,5 m pitkän putken massa, kun teräksen tiheys on $7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3.



371 Moottorisahan öljyä myydään 1 litran ja 3 litran muovipulloissa. Pullot ovat samanmuotoiset, ja pullojen muovimäärä on suoraan verrannollinen niiden pinta-alaan. Kuinka moninkertainen muovimäärä on 3 litran pullossa 1 litran pulloon verrattuna? Kuinka monta prosenttia vähemmän 3 litran pullossa on käytetty muovia öljylitraa kohti kuin 1 litran pullossa? [K99, 5a]

372 Suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin vetoisuus on 200 ℓ, ja sen sivun pituus on 1,12 m. Kyljellään makaavassa tynnyrissä on polttoainetta 32 cm. Ostaja maksoi tynnyristä polttoaineineen 600 mk. Tekikö ostaja hyvän kaupan, kun polttoaine maksaa 4,67 mk/ℓ ja tynnyri on arvoltaan 100 mk? [S95, 6]

373 Maapallon napa-alueiksi kutsutaan pohjoisen napapiirin pohjoispuolella olevaa aluetta ja eteläisen napapiirin eteläpuolista aluetta. Trooppinen alue on päiväntasaajan kummallakin puolella kääntöpiirien välissä oleva alue. Kuinka monta prosenttia napa-alueet ovat koko maapallon pinta-alasta? Entä kuinka monta prosenttia on trooppinen alue? Napapiirin leveysaste on 66,5° ja kääntöpiirin 23,5°. [S01, 6]

374 Suoran ympyräkartion pohjana on kuution pohjaneliön sisään piirretty ympyrä. Kartio leikkaa kuution vastakkaisen tahkon pitkin ympyrää, jonka ala on kolmasosa pohjaympyrän alasta. Laske kartion tilavuuden ja kuution tilavuuden suhde. [K91, 5b]

375 Portugalissa sijaitsee Euroopan läntisin niemenkärki, Cabo da Roca, johon maailman aikoinaan uskottiin loppuvan. Kuinka korkea näkötorni pitäisi tämän niemen kärkeen rakentaa, jotta olisi mahdollista nähdä 5100 km päässä oleva Pohjois-Amerikan rannikon lähin kohta? Maan säde on 6400 km.

376 Kuopio ja Bosborin salmen vieressä sijaitseva Istanbul ovat likimain samalla pituuspiirillä, 28° itäistä pituutta. Kuopion sijainti on 62° 52′ ja Istanbulin 41° 1′ pohjoista leveyttä.

a) Kuinka pitkä matka on Maan pintaa pitkin lyhintä reittiä Kuopiosta Istanbuliin?
b) Kuinka paljon suora tunneli lyhentäisi tätä matkaa?
c) Kuinka korkealle maanpinnasta Istanbulin yläpuolella pitäisi nousta, jotta voisi nähdä Kuopioon? Maan säde on 6370 km.

377 Suoran ympyräkartion pohjan säde on r ja sivujana $2r$. Ympyräkartion sisään asetetaan mahdollisimman suuri pallo. Laske pallon tilavuuden suhde ympyräkartion tilavuuteen.

378 Suoran ympyräkartion sivujana ja pohjan halkaisija ovat yhtä suuret. Kartion sisään asetetaan pallo, jonka halkaisija yhtyy kartion korkeuteen. Missä suhteessa pallo jakaa kartion sivujanan?

379 Suoran ympyräkartion huippu ja pohjaympyrä ovat r-säteisen pallon pinnalla. Kartion korkeus on $\frac{3}{2}r$. Kuinka monta prosenttia kartio on pallon tilavuudesta?

380 Kannellisen suorakulmaisen särmiön muotoisen kenkälaatikon korkeus on 18 cm, leveys 22 cm ja pituus 34 cm.

a) Hämähäkki kutoo verkon säikeen laatikon yläreunan pitkän sivun keskipisteestä kaukaisimpaan sisänurkkaan. Kuinka pitkä tämä säie on?
b) Laatikon pohjan keskipisteessä on muurahainen, joka huomaa hämähäkin ja lähtee pinkomaan pakoon. Muurahainen suuntaa lyhintä reittiä laatikon ulkopuoliseen alanurkkaan kannen keskipisteessä olevan reiän kautta. Kuinka pitkä matka muurahaisen on kuljettava?

381 Säännöllisen tetraedrin $ABCD$ särmän pituus on a. Särmien DA, DB ja DC keskipisteiden kautta on asetettu taso. Laske tasosta tetraedrin sisään jäävän osan pinta-ala. [S02, 7]

382 Kuution jokaiselle sivutahkolle asetetaan samanlainen säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Näiden yhteinen korkeus määräytyköön siten, että kahden vierekkäisen pyramidin huiput ja vastaavien tahkojen leikkaussärmä sijaitsevat samassa tasossa. Tällöin syntyy monitahokas, jota kutsutaan *rombidodekaedriksi*. Sen sivutahkot ovat suunnikkaita, jotka muodostuvat kahdesta vierekkäisten pyramidien sivutahkosta.

a) Laske pyramidin korkeuden ja kuution särmän pituuden suhde.
b) Laske rombidodekaedrin sivutahkon kulmat asteen tarkkuudella.
c) Laske rombidodekaedrin ja kuution tilavuuksien suhde. [K00, 10]

383 Metaanimolekyyli CH_4 voidaan ajatella säännölliseksi tetraedriksi, jossa vetyatomit H ovat kärjissä ja hiiliatomi C keskipisteessä, yhtä kaukana kärjistä. Määritä metaanimolekyylin sidoskulma, ts. hiiliatomista kahteen vetyatomiin vedettyjen janojen välinen kulma. [K96, 10a]

384 Suoran pyramidin pohja on neliö ja sivutahkot muodostavat pohjan kanssa 40° kulman. Kuinka suuri on sivutahkojen välinen kulma (asteissa)? [S95, 8a]

4 Analyyttinen geometria

4.1 Peruskäsitteitä

401 Olkoot pisteet $A = (3, -5)$ ja $B = (1, 9)$. Laske
a) janan AB pituus
b) janan AB keskipiste
c) pisteen C koordinaatit, kun C on janan AB jatkeella ja $|AB| = |BC|$.

402 Tutki, onko piste a) $(1, -2)$ b) $(-3, 3)$ käyrällä $2x^2 - 3y^2 = 5x + 6y - 3$.

403 Kuinka kaukana origosta on suorien $3x - 2y - 16 = 0$ ja $5x - 4y + 16 = 0$ leikkauspiste? [s91, 4a]

404 Määritä käyrien $y = 2x^2 - 3x + 1$ ja $y = 2x - 1$ leikkauspisteet.

405 Kolmion kärjet ovat pisteissä $A = (1, -1)$, $B = (0, 2)$ ja $C = (-3, 4)$. Laske kolmion ala.

406 Määritä vakio a niin, että piste $(2, 2a)$ on käyrällä $49ax + 25ay - 4 = 0$.

4.2 Suora

407 Suora kulkee pisteiden $(5, -2)$ ja $(-1, 4)$ kautta. Määritä suoran kulmakerroin ja suuntakulma.

408 Olkoon annettuna kaksi pistettä: $A = (2, 6)$ ja $B = (1, -1)$. Määritä
a) pisteiden A ja B määrittämän suoran yhtälö
b) janan AB pituus
c) janan AB keskipisteen koordinaatit. [s06, 2]

409 Suora kulkee pisteen (1, 2) kautta. Määritä suoran yhtälö, kun a) se on x-akselin suuntainen b) se on y-akselin suuntainen c) sen suuntakulma on -45 astetta d) se on kohtisuorassa suoraa $2x + y = 0$ vastaan. Piirrä kuviot. [K02, 1]

410 Määritä jokin suoran $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{4}$ a) suuntavektori b) normaalivektori.

411 Suorat $y = 2x$, $y = -\frac{1}{2}x$ ja $x + y = 3$ rajoittavat kolmion. a) Määritä kolmion kärkipisteiden koordinaatit. b) Laske kolmion sivujen pituudet. Piirrä kuvio. [S02, 1]

412 Määritä suoran yhtälö, kun suora kulkee pisteen $(\sqrt{3}, -1)$ kautta ja
a) sen kulmakerroin on 2
b) sen suuntakulma on 30°
c) se on suoran $2x + 3y - 5 = 0$ suuntainen.

413 Suora L on suoran $3x + 4y = 5$ suuntainen ja kulkee pisteen $(3, -2)$ kautta. Missä pisteessä L leikkaa x-akselin? [K74, 1]

414 Suora kulkee pisteen $\left(4\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$. Missä pisteessä suora leikkaa y-akselin?

415 Määritä suora, joka kulkee pisteen (1, 2) kautta ja on kohtisuorassa suoraa $y = 2x$ vastaan. Laske mainittujen suorien ja x-akselin rajoittaman kolmion ala. [k87, 2]

416 Millä vakion c arvoilla suoran $2x + 5y + c = 0$ ja koordinaattiakselien rajaaman kolmion ala on 5?

417 Määritä ne suoran $x = 3$ pisteet, joista pisteiden $(1, -1)$ ja $(5, 2)$ yhdistysjana näkyy suorassa kulmassa. [s73, 5]

418 Millä vakion a arvoilla suorat $x + ay + 2a = 0$ ja $a^2x + y + 1 = 0$ ovat
a) kohtisuorassa toisiaan vastaan
b) yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy?

419 Kolmion ABC kärkipisteet ovat $A = (1, 2)$, $B = (3, -2)$ ja $C = (5, 4)$. Määritä kantaa BC vastaan piirretyn korkeusjanan pituus.

420 Määritä se x-akselin piste, jonka etäisyys pisteiden $(1, 4)$ ja $(-2, 1)$ kautta kulkevasta suorasta on $3\sqrt{2}$.

421 Kolmion kärjet ovat pisteissä $A = (-2, 2\sqrt{2})$, $B = (-2, -\sqrt{2})$ ja $C = (3, \sqrt{2})$. Laske kolmion kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella. [s00, 9]

422 Määritä sen suoran yhtälö, joka puolittaa x-akselin ja suoran $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ välisen terävän kulman. [K81, 4]

4.3 Ympyrä

423 Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0$ keskipiste ja säde.

424 Määritä ympyrän yhtälö, kun sen keskipiste on $(-2, 5)$ ja ympyrä kulkee pisteen $(3, -7)$ kautta.

425 Muodosta sen ympyrän yhtälö, joka kulkee pisteiden $(-6, 6)$, $(-2, -2)$ ja $(-5, -1)$ kautta.

426 Määritä vakiot a, b ja c niin, että ympyrällä $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ on halkaisijana jana AB, jossa $A = (-3, 1)$ ja $B = (1, 9)$.

427 Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + 3y - 4 = 0$ keskipiste ja säde sekä pisteen $(6, 1)$ etäisyys ympyrästä.

428 Laske sen ympyrän säde, jonka keskipiste on suoralla $x - y + 2 = 0$ ja joka sivuaa suoraa $2x - y - 10 = 0$ pisteessä $(6, 2)$. [k74, 6a]

429 Määritä ympyrän $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ pisteeseen $(-1, 1)$ piirretyn tangentin yhtälö.

430 Määritä ne ympyrän $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$ tangentit, jotka kulkevat pisteen $(-8, -4)$ kautta.

431 Määritä vakio a niin, että suora $3x + 4y + a = 0$ sivuaa ympyrää $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$.

432 Laske origosta ympyrälle $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$ piirrettyjen tangenttien välinen kulma 0,1°:n tarkkuudella. [k75, 7a]

433 Millä parametrin a arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + 4ax - 6ay + a^2 + 9a + 3 = 0$ on ympyrän yhtälö? Minkä käyrän ympyröiden keskipisteet piirtävät?

434 Osoita, että kaikilla parven $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay = 5 - 10a$ ympyröillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Mikä tämä piste on? Piirrä ympyräparven kuva. [S91, 8b]

4.4 Paraabeli

435 Määritä paraabelin a) $y = x^2 - 4x + 5$ b) $x = 6y - y^2$ huippu ja akseli.

436 Paraabelin huippu on origossa ja paraabeli kulkee pisteen $(1, -2)$ kautta. Määritä paraabelin yhtälö, kun paraabeli aukeaa a) alaspäin b) oikealle.

437 Ylöspäin aukeavan paraabelin huippu on pisteessä $(-3, -1)$. Määritä paraabelin yhtälö, kun paraabeli kulkee pisteen $(6, 26)$ kautta.

438 Paraabelin akseli on x-akselin suuntainen ja se kulkee pisteiden $(0, 4)$, $(4, 6)$ ja $(-5, 9)$ kautta. Määritä paraabelin yhtälö.

439 Laske paraabelien $y = 5x^2 - x$ ja $y = 1 - x^2$ leikkauspisteet. [s02, 2]

440 Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 4x = 0$ ja paraabelin $y = -x^2 + 4x$ leikkauspisteet.

441 Suora $3x - 2y + 4 = 0$ leikkaa paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2$ pisteissä A ja B. Kuinka suuressa kulmassa jana AB näkyy origosta? [K75, 4a]

442 Määritä paraabelille $y = 2x^2 - 6x$ origoon piirretyn tangentin yhtälö.

443 Määritä vakiot b ja c niin, että paraabeli $y = x^2 + bx + c$ kulkee suoran $x - y = 0$ ja ympyrän $x^2 + y^2 + 4y = 0$ leikkauspisteiden kautta.

444 Mitkä paraabelin $y = x^2$ pisteet ovat etäisyydellä 1 suorasta $3x - 4y - 4 = 0$?

445 Ympyrälle $x^2 + y^2 = 5$ piirretään tangentti pisteeseen $(1, 2)$. Määritä sen janan pituus, jonka paraabeli $y = 2x^2$ leikkaa tästä tangentista.

446 Osoita, että suora $y = -6x - \frac{1}{2}$ on paraabelin $y^2 = 12x$ tangentti.

447 Määritä parametri k niin, että suora $y = kx - 2$ on paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ tangentti.

448 Suoran tunnelin poikkileikkaus on paraabelin muotoinen. Tunnelin korkeus on 7,0 m ja leveys maan tasolla 6,0 m. Tavarajuna kuljettaa 4,0 m leveitä ja 4,0 m korkeita kuution muotoisia kontteja. Pystyykö juna käyttämään tunnelia?

449 Erään vuorokauden aikana on hetkellä t ulkoilman lämpötila $x(t) = -0{,}02t^2 + 0{,}61t + 4{,}00$, $0 \le t \le 24$; aika t on annettu tunteina ja lämpötila $x(t)$ celsiusasteina. Milloin lämpötila on korkeimmillaan ja milloin matalimmillaan? [k98, 6a]

450 Määritä se paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ piste (x, y), jossa koordinaattien summa on mahdollisimman pieni. [k05, 11]

451 Määritä vakio a lukujen 0 ja 2 välistä siten, että suoran $(2a + 1)x + (a - 2)y - 1 = 0$ ja koordinaattiakselien rajoittaman kolmion ala on mahdollisimman pieni. Kuinka suuri tämä ala on? [k76, 9]

Luvun 4 sekalaisia tehtäviä

452 a) Määritä pisteiden (1, 2) ja (4, 3) kautta kulkevan suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$.
b) Onko piste (120, 40) tällä suoralla? [k07, 5]

453 Pisteiden (–2, 11) ja (7, –1) kautta kulkeva suora muodostaa koordinaattiakselien kanssa kolmion.
a) Muodosta suoran yhtälö.
b) Määritä syntyneen kolmion sivujen pituudet. [k01, 6]

454 Suoran suuntavektori on $5\bar{i} + \bar{j}$ ja suora kulkee pisteen (3, 5) kautta. Määritä suoran yhtälö.

455 Kolmion kärkipisteet ovat (1, 3), (2, –3) ja (5, 2). Onko kolmio ABC suorakulmainen?

456 Ympyrän $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ keskipiste on A, ja ympyrä leikkaa x-akselin pisteissä B ja C. Laske kulma BAC. [S87, 3b]

457 Paraabelin $y = ax^2 + bx - 3$ huippu on pisteessä $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$. Määritä kertoimet a ja b. [k07, 12]

458 Määritä paraabelin $y = x^2 - x$ ja suoran $y = x + 2$ leikkauspisteet ja näiden välinen etäisyys. [s05, 12]

459 Lämpömittaria tutkittiin tarkkuusmittarin avulla. Kun lämpömittari näytti –9,9 °C, oikea lämpötila oli –9,2 °C. Kun lämpömittari näytti 18,5 °C, oikea lämpötila oli 18,1 °C. Oletetaan, että oikean lämpötilan ja lämpömittarin lukeman välinen riippuvuus on lineaarinen.

a) Johda lauseke, jolla oikea lämpötila y voidaan laskea, kun lämpömittarin lukema x tunnetaan. Ilmoita esiintyvät kertoimet neljän desimaalin tarkkuudella.

b) Missä lämpötilassa lämpömittari näyttää aivan oikein? [k05, 12]

460 Pisteen (8, –1) kautta asetetaan normaali suoralle $5x - 2y + 16 = 0$. Laske sen kuperan nelikulmion ala, jota rajoittavat mainitut suorat ja koordinaattiakselit. [s74, 7a]

461 Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (4, 1) ja joka sivuaa suoraa $y = x + 1$.

462 Määritä yhtälöt sellaisille suorille, jotka ovat suoran $2x - y = 0$ suuntaisia ja joiden etäisyys pisteestä (2, –3) on $\sqrt{5}$.

463 Suoran $3x - 5y = 0$ suuntainen suora erottaa koordinaattiakselien kanssa kolmion, jonka ala on 30. Määritä tämän suoran etäisyys origosta.

464 Osoita, että suoraparven $(k - 1)x + (3k - 1)y + 5k - 1 = 0$ kaikki suorat kulkevat saman pisteen kautta. Mikä on tämä piste?

465 Määritä vakio a niin, että paraabelit $x^2 = 2y + 1 - \frac{1}{4a}$ ja $x^2 = a - 4y$ leikkaavat toisensa x-akselilla.

466 Määritä vakio a niin, että paraabeli $y = x^2 - (a + 2)x + 3a + 1$ sivuaa x-akselia.

467 Etsi yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on suoralla $y = \frac{1}{2}x$ ja joka sivuaa x-akselia ja suoraa $4x + 3y - 24 = 0$. Määritä kaikki tehtävän ratkaisut. [K06, 7]

468 Määritä sellainen luku a, että origon etäisyys suorasta $ax + (a - 1)y - 2 = 0$ on mahdollisimman suuri. Laske tämä etäisyys.

469 Millä a:n arvoilla paraabeli $y = -x^2 + 1$ on kokonaan suoran $y = x - a$ alapuolella? [k88, 6b]

470 Millä vakion t arvoilla suora $tx + y - 2 + t = 0$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ tangentti?

471 Millä vakion a arvoilla suora $ax - 3y - 29 = 0$ sivuaa ympyrää $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$?

472 Pisteet $O = (0, 0)$, $P = (1, m)$ ja $A = (a, 0)$ ovat kolmion OPA kärkiä. Määritä $a > 0$ ja $m > 0$ siten, että kolmio on suorakulmainen ja alaltaan $2m$. [s90, 7b]

473 Määritä paraabelin $y = 2x^2 + bx + 3$ huippu ja totea, että se kertoimen b arvosta riippumatta sijaitsee paraabelilla $y = -2x^2 + 3$. [K05, 5]

474 Osoita, että paraabeli $2y = -x^2 + 2ax + 2$ huippu ei millään vakion a arvolla ole käyrällä $2y = x^2$.

475 Suora $x - y - a = 0$, $a \neq 0$, jakaa ympyrän $x^2 + y^2 = a^2$ rajoittaman alueen kahteen osaan. Määritä pienemmän alueen alan suhde suuremman alueen alaan. Ilmoita tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo. Piirrä kuvio, kun a) $a > 0$ b) $a < 0$. [S05, 6]

476 a) Millä parametrin a arvoilla yhtälö

$$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + 5a^2 + 2a = 0$$

esittää ympyrää?

b) Mikä on tällöin ympyrän alan suurin mahdollinen arvo? [K04, 8]

477 Osoita, että kaikki parven $y = x^2 - 2mx + m - 1$, $m \in \mathbb{R}$, esittämät paraabelit kulkevat saman pisteen kautta. Mikä tämä piste on?

478 Osoita, että tasossa on piste, joka on yhteinen kaikille (a:n ja b:n eri arvopareja vastaaville) ympyröille $x^2 + y^2 - ax - by + 2a + b - 5 = 0$. [S74, 10a]

479 Suorakulmaisen kolmion kaikki kärjet sijaitsevat paraabelilla $y = x^2$; suoran kulman kärki on paraabelin huipussa. Osoita, että jokaisen tällaisen kolmion hypotenuusa leikkaa paraabelin akselin samassa pisteessä. Määritä tämä piste. [K01, 8]

480 Mistä tason pisteistä jana AB näkyy suorassa kulmassa, kun $A = (-2, 3)$ ja $B = (4, -5)$?

481 Määritä käyrän yhtälö, kun käyrän jokaisesta pisteestä pisteisiin $(-2, -2)$ ja $(2, 2)$ laskettujen etäisyyksien erotus on 4.

482 Määritelmän mukaan paraabeli on niiden pisteiden joukko, jotka ovat yhtä etäällä johtosuorasta ja polttopisteestä. Määritä paraabelin yhtälö, kun sen polttopiste on $(4, 3)$ ja johtosuora on $x = -5$.

483 Olkoon ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1$. Osoita, että $x_0x + y_0y = 1$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ tangentti. Mitkä ovat sivuamispisteen koordinaatit? [K03, 11]

484 Osoita, että jokainen parven $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ympyrä leikkaa parven $x^2 + y^2 - 2by = 0$ jokaisen ympyrän kohtisuorasti. [K88,9a]

485 Suorakulmion $ABCD$ kärki A on origossa, ja sille vastainen kärki C on pisteessä $(6, 4)$. Kärki B on janan AC suuntaisella suoralla. Määritä suoran yhtälö, kun suorakulmion ala on mahdollisimman suuri. [S02, 8]

486 Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -y \\ 2y - x \leq 6 \\ 3x + y \leq 3 \end{cases}$$

ja laske syntyneen alueen pinta-ala. [k03, 9]

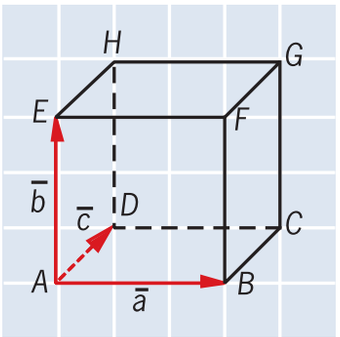
487 Missä xy-tason osissa on voimassa epäyhtälö $xy - x - y + 1 < 0$? [S94, 4b]

5 Vektorit

5.1 Peruskäsitteitä

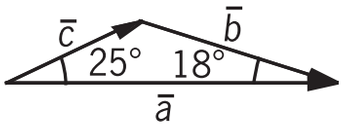
501 Kolmion ABC kärkipisteiden paikkavektorit ovat $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$. Esitä näiden avulla vektorit $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{CA}$ sekä laske summa $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$.

502 Olkoot kuution kärjestä A lähtevät särmävektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$.



Määritä vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ avulla vektori a) $\overline{AG} + \overline{HA}$ b) $\overline{BH} - \overline{CE}$.

503 Määritä vektorien välinen kulma, kun vektorit ovat a) $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ b) $\bar{a}$ ja $\bar{c}$ c) $\bar{b}$ ja $-\bar{c}$.



504 Kolmiossa ABC piste D on sivun AC keskipiste. Piste E jakaa sivun BC suhteessa 2:3. Olkoon $\overline{AB} = \bar{a}$ ja $\overline{AC} = \bar{b}$. Määritä vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla $\overline{BD}$ ja $\overline{AE}$.

505 Osoita, että vektorit $20\bar{a} - 8\bar{b}$ ja $6\bar{b} - 15\bar{a}$ ovat vastakkaissuuntaiset, kun $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

506 Olkoon $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. Määritä vakio t niin, että vektorit $\bar{u} = 2\bar{a} + 3t\bar{a} - 3t\bar{b}$ ja $\bar{v} = 2t\bar{a} - 3\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset.

507 Laske $\bar{a} \cdot \bar{b}$, kun

a) $|\bar{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 2\sqrt{3}$ ja $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = 135°$

b) $\bar{a} = -5\bar{b}$ ja $|\bar{a}| = 10$.

508 Laske $\bar{a} \cdot \bar{b}$, kun $|\bar{a}| = k$, $|\bar{b}| = 2|\bar{a}|$ ja $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = 30°$.

509 Määritä vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma, kun $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 4$ ja
a) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 10$ b) $\bar{a} \cdot \bar{b} = -10$.

510 Neljäkkään $ABCD$ sivun pituus on 4. Olkoon $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{BD} = \bar{b}$ ja $|\bar{b}| = 4$. Laske a) $\bar{a} \cdot \bar{b}$ b) $\overline{AD} \cdot \overline{BD}$.

511 Olkoon $|\bar{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\bar{b}| = \sqrt{3}$ ja $(3\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} - 2\bar{b}) = 0$. Laske vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ja välinen kulma.

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

512 Tasasivuisen kolmion ABC sivun pituus on 8. Huipusta piirretty korkeusjana on CD. Määritä a) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ b) $\overline{CD} \cdot \overline{BC}$.

513 Määritä luku t niin, että vektorit $3t\bar{a} + t\bar{b} - 2\bar{a}$ ja $2t\bar{a} - \bar{b}$ ovat samansuuntaiset, kun $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

514 Vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ muodostavat kolmiulotteisen vektoriavaruuden kannan. Jaa vektori $\bar{w} = 9\bar{a} + 4\bar{b} - 7\bar{c}$ vektoreiden $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$ ja $\bar{a} - \bar{c}$ suuntaisiin komponentteihin.

515 Kolmiossa ABC on $\overline{AB} = \bar{a}$ ja $\overline{AC} = \bar{b}$. Määritä kulman ABC kulmanpuolittajavektori $\overline{BD}$ vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla, kun $AB = 10$, $AC = 5$ ja $BC = 8$.

516 Olkoot säännöllisen tetraedrin $ABCD$ huipusta D lähtevät vektorit $\overline{DA} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$ ja $\overline{DC} = \bar{c}$. Määritä vektori $\overline{DM}$ vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ avulla, kun M on pohjan ABC painopiste.

517 Määritä kolmion ABC keskijanan CD pituus, kun $AB = 6$, $AC = 4$ ja $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 8$.

518 Määritä vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma, kun $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$ ja $\bar{a} \neq \bar{0} \neq \bar{b}$. [S86, 4b]

519 Määritä vektorien $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ välinen kulma α, $0° \leq \alpha \leq 180°$, kun
a) vektoreilla $\bar{x}$, $\bar{y}$ ja $\bar{x} + \bar{y}$ on sama pituus
b) vektoreilla $\bar{x}$, $\bar{y}$ ja $\bar{x} - \bar{y}$ on sama pituus. [K02, 6]

520 Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ toteuttavat yhtälön $2\bar{a} - 3\bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Osoita, että vektorien loppupisteet ovat samalla suoralla. [K74, 6]

521 Koordinaatistossa, jonka origo on O, on annettu vektorit $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$. Pisteet A, B ja C muodostavat kolmion. Piste P jakaa kolmion ABC keskijanan suhteessa 1:2 siten, että sivunpuoleinen osa on lyhyempi. Määritä vektori $\overline{OP}$ vektorien $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$ lausekkeena. Mikä johtopäätös voidaan tuloksen perusteella nähdä? [K99, 7b]

522 Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\overline{PA} = \bar{a}$ ja $\overline{PB} = \bar{b}$ ovat kolmion sivuina ja BC on kolmion korkeusjana. Lausu vektori $\overline{BC}$ vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla. [S74, 7b]

523 Vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat kolmion kärkipisteiden paikkavektorit. Nämä ja erään pisteen P paikkavektori toteuttavat yhtälöt

$$\begin{cases} (\bar{p} - \bar{a}) \cdot (\bar{b} - \bar{c}) = 0, \\ (\bar{p} - \bar{b}) \cdot (\bar{c} - \bar{a}) = 0. \end{cases}$$

Miten piste P voidaan tällöin luonnehtia? Todista, että myös

$$(\bar{p} - \bar{c}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = 0.$$

Minkä kolmiota koskevan alkeisgeometrisen lauseen vektorialgebrallinen todistus on kysymyksessä? [S00, 8]

5.2 Vektorit koordinaatistossa

VEKTORIT *xy*-KOORDINAATISTOSSA

524 Olkoon $A = (4, -7)$ ja $B = (-2, 1)$.

a) Määritä vektori $\overline{AB}$ ja $|\overline{AB}|$.

b) Määritä janan AB keskipisteen paikkavektori.

525 Olkoon piste $A = (-5, 3)$ ja $\overline{AB} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$.

a) Määritä pisteen B koordinaatit.

b) Määritä vektorin $\overline{CA} = -9\bar{i} + 5\bar{j}$ alkupiste.

526 Jaa vektori $4\bar{i} - 5\bar{j}$ komponentteihin, joista toinen on $-5\bar{i} + \bar{j}$ ja toinen on vektorin $3\bar{i} - 2\bar{j}$ kanssa yhdensuuntainen.

527 Olkoon $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} - 2\bar{j}$. Laske a) $\bar{a} \cdot \bar{b}$ b) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b})$.

528 Olkoon $\bar{a} = 3\bar{i} - \sqrt{3}\,\bar{j}$ ja $\bar{b} = \sqrt{2}\,\bar{i}$. Laske vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma.

529 Suunnikkaan sivuina ovat vektorit $\bar{a} = 8\bar{i}$ ja $\bar{b} = 4\bar{i} + 5\bar{j}$. Laske suunnikkaan lävistäjien välinen kulma.

530 Olkoon $\bar{a} = 8\bar{i} - 6\bar{j}$.

a) Määritä vektorin $\bar{a}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori $\bar{a}^0$.

b) Määritä xy-tason yksikkövektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\bar{a}$ vastaan.

531 Tutki, ovatko vektorit $\bar{a} = t\bar{i} - t\bar{j} - \bar{i}$ ja $\bar{b} = t\bar{i} + t\bar{j} - \bar{j}$ aina kohtisuorassa toisiaan vastaan.

532 Puolisuunnikkaassa $ABCD$ on $\overline{DA} = 2\bar{i} - 10\bar{j}$ ja $\overline{CB} = 18\bar{i} - 10\bar{j}$. Laske kantojen AB ja DC keskipisteiden yhdysjanan pituus.

533 Vektori $\bar{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{v} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ kanssa. Vektorin $\bar{u}$ pituus on 6 ja alkupiste on $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Määritä vektorin $\bar{u}$ loppupiste

534 Pisteestä $A = (1, 1)$ ja $B = (-1, 2)$ piirretään vektorit suoralla $y = x + 1$ olevaan pisteeseen P. Määritä P siten, että vektorit $\overline{AP}$ ja $\overline{BP}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. [S88, 4a]

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

535 Vektoreilla $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ on yhteinen alkupiste $(3, 0)$. Vektorin $\bar{a}$ loppupiste on $(0, -2)$ ja vektorin $\bar{b}$ loppupiste on $(-4, 2)$. Laske $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

536 Tutki, ovatko pisteet $A = (-2, -1)$, $B = (1, 1)$ ja $C = (5, 3)$ samalla suoralla.

537 Nelikulmiossa $ABCD$ on $\overline{AB} = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\overline{BC} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\overline{DA} = -4\bar{j}$. Osoita, että nelikulmion lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

538 Olkoon $A = (1, 2)$ ja $B = (3, -2)$. Määritä ne xy-tason pisteet P, joista jana AB näkyy suorassa kulmassa.

539 Kolmiossa ABC on $\overline{AB} = 3\bar{i} - \bar{j}$ ja $\overline{AC} = -\bar{i} + 2\bar{j}$. Määritä $\overline{AD}$, kun CD on kolmion korkeusjana.

540 Suunnikkaan samasta kärjestä lähtevänä sivuvektorina on $\bar{i} + 2\bar{j}$ ja lävistäjävektorina on $3\bar{i} + 3\bar{j}$. Määritä suunnikkaan alan tarkka arvo.

541 Vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ päätepisteet ovat $A = (3, 1)$, $B = (7, 3)$, $C = (1, 4)$ ja $D = (-3, -2)$. Laske vektorien välisen kulman suuruus 0,1 asteen tarkkuudella. Piirrä kuvio. [S05, 3]

542 Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset. Olkoon $\bar{a} = \frac{3}{2}\bar{i} - 2\bar{j}$ ja olkoon vektorin $\bar{b}$ pituus 5. Määritä $\bar{b}$. Mikä on loppupiste, kun $\bar{b}$ asetetaan alkamaan pisteestä (4, 3)? [K01, 3]

543 Suunnikaan lävistäjinä ovat vektorit $\bar{d} = 12\bar{i} + 8\bar{j}$ ja $\bar{e} = 4\bar{i} - 6\bar{j}$. Osoita, että kyseessä on neljäkäs. [K98, 3b]

544 Esitä muodossa $Ax + By + C = 0$ se suora, jonka origosta alkava vektori $2\bar{i} - \bar{j} + t(\bar{i} + 2\bar{j})$ piirtää, kun t saa kaikki reaaliarvot. [S93, 3b]

545 Jaa vektori $\bar{i} + 7\bar{j}$ vektoreiden $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = -7\bar{i} + 6\bar{j}$ suuntaisiin komponentteihin. [S06, 4]

546 Olkoon $\overline{OA} = 7\bar{i} + 9\bar{j}$ tason vektori. Määritä kaikki sellaiset vektorit $\overline{OB}$, että kulma OAB on suora ja vektorin $\overline{AB}$ pituus on puolet vektorin $\overline{OA}$ pituudesta. [K05, 4]

547 Origosta O alkava vektori on vektorin $3\bar{i} + \bar{j}$ suuntainen, ja sen kärki P on pisteiden $A = (1, 2)$ ja $B = (7, 1)$ yhdysjanalla. Missä suhteessa piste P jakaa janan AB? [S04, 4]

548 Pisteestä $P(1, -1)$ lähtevät vektorit $\bar{a} = \bar{i} + 4\bar{j}$ ja $\bar{b} = -2\bar{i} + 5\bar{j}$ ovat suunnikkaan sivuina. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste olkoon Q. Määritä vektori $\overline{PQ}$ sekä pisteen Q koordinaatit. [K04, 4]

549 Määritä kaikki origosta lähtevät vektorit, jotka ovat vektorin $12\bar{i} - 13\bar{j}$ pituiset ja kohtisuorassa sitä vastaan. [S88, 4]

550 Laske $|\bar{a} + 2\bar{b}|$, kun $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 3$ ja $|3\bar{a} + \bar{b}| = 2\sqrt{6}$. [S83, 4b]

551 Esitä vektori $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ kantavektorien $\bar{e}_1 = \bar{i} + \bar{j}$ ja $\bar{e}_2 = \bar{i} + 2\bar{j}$ avulla. [K85, 5b]

552 Kulman kärki on pisteessä (1, 2), ja pisteet (4, 6), (13, –3) sijaitsevat sen kyljillä. Laske kulman puolittajan suuntainen yksikkövektori. [K00, 6]

553 Pisteestä (–2, 0) lähtevä vektori $\bar{v}$ muuttuu siten, että sen kärki piirtää ympyrän $x^2 + y^2 = 16$. Minkä käyrän piirtää tällöin vektorin keskipiste? [S89, 7b]

VEKTORIT *xyz*-KOORDINAATISTOSSA

554 a) Ovatko vektorit $\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ ja $\bar{u} = -4\bar{i} + 6\bar{j}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan?

b) Olkoon $\bar{a} = 2\bar{i} - r\bar{j} - 3\bar{k}$ ja $\bar{b} = -r\bar{i} - r\bar{j} + \bar{k}$. Määritä vakio r niin, että $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

555 Olkoon $\bar{a} = -16\bar{i} + 32\bar{j} + 3t\bar{k}$ ja $\bar{b} = 4\bar{i} + t\bar{j} + 6\bar{k}$. Määritä vakio t niin, että vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset.

556 Määritä vektori, joka on kohtisuorassa sekä vektoria $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ että vektoria $\bar{b} = -\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ vastaan ja jonka pituus on 1. [K80, 6a]

557 Määritä suorien AB ja AC välinen kulma, kun $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ ja $C = (-1, 3, 4)$.

558 Määritä tasojen $x + y + z = 1$ ja $2y + z = 0$ välinen kulma.

559 Vektorit $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = x\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ ja $\bar{c} = -2\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ovat suuntaissärmiön erisuuntaisina särminä. Määritä kertoimet x, y ja z siten, että särmiö on suorakulmainen, ja laske tämän särmiön tilavuus. [S78, 5a]

560 Määritä pisteen $P = (-1, 3, -2)$ etäisyys a) xy-tasosta b) yz-tasosta c) xz-tasosta d) x-akselista e) y-akselista f) z-akselista.

561 Tutki, ovatko pisteet $P = (4, 1, -2)$ ja $Q = (0, 2, 4)$ pisteiden $A = (1, 1, 1)$ ja $B = (-1, 1, 3)$ määräämällä suoralla. [K06, 6]

562 Määritä pisteen $P = (4, 0, 1)$ etäisyys pisteiden $A = (-2, -1, 2)$ ja $B = (6, 5, -2)$ kautta kulkevasta suorasta.

563 Ovatko pisteet samassa tasossa?
a) $A(2, -1, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-1, 0, 0)$ ja $D(0, 2, 2)$
b) $A(2, -1, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-1, 0, 0)$ ja $D(7, -1, 1)$

564 Suora kulkee pisteiden (1, 0, 2) ja (3, 1, 3) kautta. Laske suoran ja yz-tason välinen kulma.

565 Suoran $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, pisteestä $A = (0, 1, 5)$ siirrytään ensin vektorin $\bar{u} = 4\bar{i} - 8\bar{j} + 6\bar{k}$ osoittama matka pisteeseen B ja sitten 15 yksikkövektoria vektorin $\bar{v} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ suuntaan pisteeseen C. Päädytäänkö takaisin alkuperäiselle suoralle?

566 Ratkaise yhtälöryhmä a) $\begin{cases} x + 3y + 4z = 0 \\ x - 2y + 3z = -3 \\ 2x - 5y - z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$
ja tulkitse tulos geometrisesti.

567 Pisteet $A = (-1, -1, -1)$, $B = (0, 2, 3)$ ja $C = (1, 0, -3)$ määräävät tason.
a) Muodosta tason ABC yhtälö.
b) Määritä pisteen $P = (2, -3, -2)$ etäisyys tasosta ABC.

568 Laske tetraedrin tilavuus, kun sen kärkipisteinä ovat origo sekä pisteet $(1, 0, 2)$, $(-2, -1, 1)$ ja $(-3, -1, 1)$.

569 Millä x:n positiivisella arvolla vektoreiden $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $x\vec{k}$ kärkien määräämän kolmion ala on 2? [S84, 5b]

570 Suora on vektorin $3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ suuntainen ja kulkee pisteen $(2, 3, 7)$ kautta. Määritä sen ja tason $x + 2y + z = 1$ leikkauspiste. [K03, 7]

571 Osoita, että pisteiden $\left(2, 11\frac{1}{2}, 2\right)$ ja $\left(4, \frac{1}{2}, -1\right)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa pisteiden $(5, 2, 0)$, $(1, 1, 1)$ ja $(4, 1, 3)$ kautta kulkevaa tasoa vastaan. [S01, 7]

572 Määritä muodossa $ax + by + cz = 1$ sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(1, 1, 1)$ kautta ja leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x - y = 2$. [S06, 8]

573 Millä parametrin t arvoilla origosta lähtevien vektoreiden $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{c} = t(\vec{i} + \vec{j}) + \vec{k}$ kärjet määräävät suorakulmaisen kolmion? [S83, 8a]

574 Määritä normaalivektori tasolle, joka sisältää pisteen $(1, 1, 1)$ ja suoran $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$. [K02, 11]

6 Todennäköisyyslaskenta

6.1 Kombinatoriikkaa

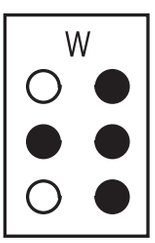
601 Kokelaan ylioppilastutkinnon matematiikan koe muodostuu 10 tehtävästä. Vanhanmuotoisessa matematiikan kokeessa oli 10 tehtävää ja osassa tehtävistä oli kaksi vaihtoehtoa, joista sai laskea vain toisen; nykyisessä kokeessa saa 15 tehtävästä vapaasti valita suoritettavakseen 10 tehtävää. Kuinka monta erilaista 10 tehtävän kokonaisuutta on a) vanhanmuotoisessa kokeessa, jossa viidessä tehtävässä on kaksi vaihtoehtoa, ja b) nykyisessä uudenmuotoisessa kokeessa? [s00, 8]

602 a) Kuinka monta erilaista istumajärjestystä voidaan muodostaa luokassa, jossa on 30 oppilasta ja 30 pulpettia?
b) Kuinka monella tavalla kolme tyhjää pulpettia voidaan valita luokassa, jossa on 27 oppilasta ja 30 pulpettia? Kuinka monta erilaista istumajärjestystä on tässä luokassa?
c) Kuinka monta vuotta tietokoneelta kuluisi, jos se kävisi läpi a-kohdan erilaiset istumajärjestykset käsitellen biljoona (10^{12}) istumajärjestystä sekunnissa? Yksi vuosi on keskimäärin 365,25 vuorokautta. [s06, 11]

603 Lottoarvonnassa arvotaan 39 numerosta 7 numeroa. Kuinka monta erilaista 7 rastin lottoruudukkoa on olemassa? Kun on arvottu seitsemän numeroa (eikä ns. lisänumeroita oteta huomioon), erilaisia 4 oikein -ruudukkoja on erään lehtiartikkelin mukaan olemassa 173 600. Tarkista, onko luku oikea. Jos ei, niin mikä on oikea lukumäärä? Laske, kuinka monta erilaista 5 oikein -ruudukkoa ja kuinka monta erilaista 6 oikein -ruudukkoa on olemassa. [s03, 9]

604 Kokouksen alussa osanottajat kättelivät toisensa kertaalleen. Kädenpuristuksia tuli tällöin kaikkiaan 66. Kuinka monta osanottajaa kokouksessa oli? [s05, 6]

605 Ranskalaisen Louis Braillen vuonna 1825 kehittämä pistekirjoitus on kohokirjoitusta, jota luetaan sormin. Pistekirjoitusjärjestelmässä kutakin merkkiä kohti on käytettävissä kuusi kiinteää paikkaa, joihin voidaan asettaa yhdestä kuuteen pistettä. (Esimerkkinä kuviossa on kirjain W.) Kuinka monta erilaista merkkiä järjestelmässä voidaan esittää? [k07, 10]



606 Elokuvateatterissa on vapaana 7 vierekkäistä numeroitua paikkaa.
a) Kuinka monella tavalla teatteriin saapuva 5 hengen seurue voi valita istumapaikkansa?
b) Kuinka monella tavalla 5 hengen seurue voi valita paikkansa, kun Liisa ja Maija eivät halua istua vierekkäisillä paikoilla?

6.2 Todennäköisyys

607 Abiturientilla on kaksi herätyskelloa. Uudempi toimii oikein 98 %:n todennäköisyydellä ja vanhempi 85 %:n todennäköisyydellä. Matematiikan kokeen aattona abiturientti asettaa molemmat kellot soimaan seuraavana aamuna. Millä todennäköisyydellä kelloista soi oikeaan aikaan a) molemmat b) vain toinen c) ei kumpikaan? [s06, 4]

608 Pekka tietää kokemuksesta, että hän osuu tikanheitossa kymppiin 8 prosentin todennäköisyydellä. Pekka heittää viisi tikkaa. Millä todennäköisyydellä hän osuu kymppiin a) ensimmäisellä, muttei muilla tikoilla b) ainakin yhdellä tikalla c) täsmälleen yhdellä tikalla? [k00, 6]

609 Korttipakasta nostetaan umpimähkään 2 korttia. Millä todennäköisyydellä a) molemmat ovat mustia b) ainakin toinen on kuvakortti (11, 12, 13) tai ässä?

610 Henkilöt A, B ja C ampuvat kukin yhden laukauksen. Heidän todennäköisyytensä osua maaliin ovat 0,80, 0,60 ja 0,40. Mikä on todennäköisyys sille, että tasan kaksi heistä osuu maaliin? [K68, 12]

611 Heitetään arpakuutiota 2 kertaa. Millä todennäköisyydellä a) ainakin toisella heitolla tulee pariton silmäluku? b) silmälukujen ero on korkeintaan 2?

612 a) Kahta virheetöntä noppaa heitetään kerran. Mikä on todennäköisyys, että pistesumma on suurempi kuin kahdeksan?
b) Kahta virheetöntä noppaa heitetään kahdesti. Mikä on todennäköisyys, että kummallakin kerralla pistesumma on suurempi kuin kahdeksan? [k04, 6]

613 Noppaa heitetään kaksi kertaa. Mikä on todennäköisyys, että jälkimmäisellä heitolla saadaan suurempi silmäluku kuin edellisellä? Jos noppaa heitetään kolme kertaa ja ensimmäisellä heitolla on saatu kolmonen, mikä on todennäköisyys, että toisella heitolla saadaan suurempi silmäluku kuin ensimmäisellä ja kolmannella heitolla suurempi kuin toisella? [k02, 9]

614 Kolikkoa heitetään a) neljä kertaa b) kaksikymmentä kertaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan yhtä monta kruunaa ja klaavaa? Vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. [s05, 10]

615 Noppaa heitetään 5 kertaa. Millä todennäköisyydellä tuloksena on a) täsmälleen kaksi kuutosta b) vähintään kaksi kuutosta? [k06, 9]

616 Erään alueen kyykäärmeistä 70 % on harmaita, ja niiden selässä oleva sahakuvio erottuu hyvin. Saman alueen kyykäärmeistä 30 % on tummia, joilla sahakuvio erottuu heikosti. Kuinka monta kyytä marjastajan pitäisi nähdä, jotta hän yli 90 %:n todennäköisyydellä näkisi ainakin yhden tumman kyyn?

617 Arpajaisissa on suuri määrä arpoja, joista joka kuudennen luvataan voittavan.

a) Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin 1 voitto, jos ostetaan 10 arpaa?
b) Kuinka monta arpaa on ostettava, jotta saataisiin ainakin yksi voitto vähintään todennäköisyydellä 0,6?

618 Sanan YLIOPPILAS kymmenestä kirjaimesta otetaan umpimähkään kolme. Millä todennäköisyydellä

a) ensiksi otettu kirjain on vokaali
b) otetuista kirjaimista vain yksi on vokaali
c) otetuista kolmesta kirjaimesta voidaan muodostaa sana ILO? [k01, 10]

619 Kauppakeskuksen kaksi pankkiautomaattia ovat kumpikin ruuhka-aikana keskimäärin 40 minuuttia tunnista varattuna ja loput ajasta vapaana. Molemmat ovat yhtaikaa varattuna keskimäärin 28 minuuttia tunnista. Millä todennäköisyydellä pankkiautomaateille saapuva asiakas pääsee heti vapaalle automaatille?

620 Eräs laatikko voi sitä heitettäessä jäädä kolmeen erilaiseen asentoon, joiden todennäköisyydet ovat 0,6, 0,3 ja 0,1. Mikä on todennäköisyys sille, että laatikkoa kolmesti heitettäessä ainakin yksi näistä tapauksista jää esiintymättä? [K72, 12]

6.3 Jakauma

621 Kolikko on painotettu niin, että kruunan todennäköisyys on $\frac{3}{4}$ ja klaavan todennäköisyys on $\frac{1}{4}$. Olkoon satunnaismuuttuja X kruunien lukumäärä 5 heitolla.

a) Muodosta satunnaismuuttujan X jakauma.
b) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.

622 Olkoon $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + a, & \text{kun } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$ jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.

a) Määritä vakio a.

b) Laske $P(X < 1)$, $P\left(\frac{1}{2} \le X < 2\right)$ ja $P(X = 1)$.

623 Rusinapussin paino on jakautunut normaalisti keskiarvona 300 g ja keskihajontana 28 g. Kuinka suuri osuus pusseista painaa a) alle 280 g b) yli 350 g c) tasan 300 g?

624 Työhönottohaastattelu kestää keskimäärin 25 minuuttia. Oletetaan, että sen pituus on normaalisti jakaantunut N(25, σ). Mikä on keskihajonnan σ oltava, että haastattelu ei 95 prosentin varmuudella ylitä 30:tä minuuttia? [s99, 7]

625 Lukion A opiskelija Alina sai lukioiden yhteisessä vieraan kielen ainekirjoituskokeessa 82 pistettä ja lukion B opiskelija Bertta 80 pistettä. Kummassakin lukiossa kokeen keskiarvo oli 72 pistettä. Hajonta lukiossa A oli 9,2 pistettä ja lukiossa B 6,8 pistettä. Oletetaan, että pistemäärät noudattavat normaalijakaumaa. Tutki, kumpi opiskelija menestyi paremmin oman lukionsa tasoon verrattuna. Kuinka suuri osuus lukion B opiskelijoista menestyi kokeessa keskiarvoa paremmin mutta huonommin kuin Bertta? Entä Alinaa paremmin lukiossa A? [s01, 15]

626 Eräässä lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa keskiarvo oli 27,36 ja keskihajonta 12,23 pistettä. Jos oletetaan pistemäärän noudattavan normaalijakaumaa, niin

a) mikä on alin pistemäärä, jolla saa laudaturin, jos laudatur-arvosanojen osuudeksi halutaan enintään 5 % kaikista kokelaista
b) kuinka monta prosenttia kokelaista hyväksytään, jos alin hyväksytty pistemäärä on 12? [s05, 14]

627 Tehdas ilmoitti valmistamiensa auton sytytystulppien kestävyyden ajokilometreinä noudattavan normaalijakaumaa N(25 000 km, 2000 km). Kuinka monen kilometrin jälkeen tällaisen tulpan toimintavarmuus laskee alle 95 prosentin? [s02, 10]

628 Satunnaismuuttuja X on jakautunut normaalisti, odotusarvona 0 ja keskihajontana 1. Määritä sellainen vakion a arvo, että

a) $P(X \le a) = 0{,}99$ b) $P(|X| \le a) = 0{,}99$.

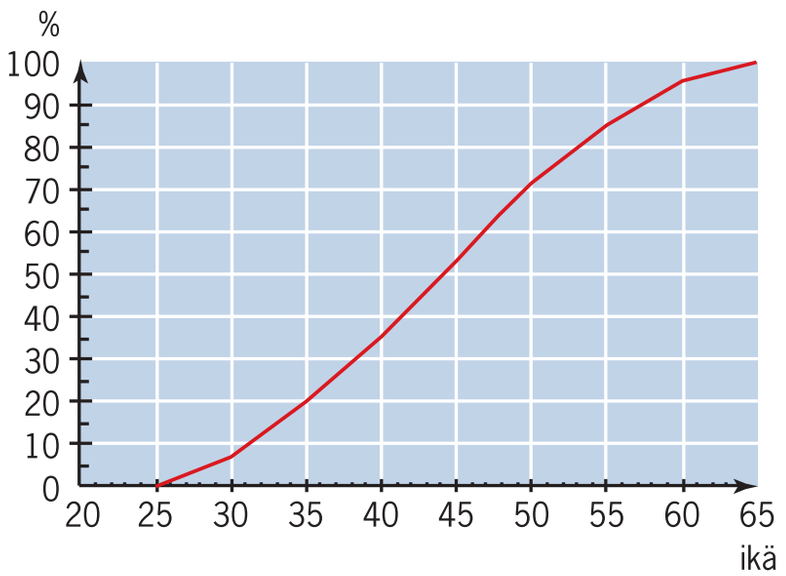
Luvun 6 sekalaisia tehtäviä

629 Oppilas on saanut matematiikan kursseista arvosanat 9, 8, 6, 4, 5 ja 9. Määritä arvosanojen keskiarvo ja mediaani. Oppilas osallistuu vielä yhteen syventävään kurssiin. Millaisiksi em. tunnusluvut tällöin enintään voivat parantua? [k99, 2]

630 Viiden jalkapalloilijan yhteispaino on 425 kg, ja kymmenen balettitanssijan keskimääräinen paino on 52 kg. Mikä on kaikkien viidentoista keskimääräinen paino? [K98, 2]

631 Kuvion summafrekvenssikuvaaja esittää ammatissa toimivien lääkärien ikäjakaumaa vuonna 2001. (Lähde: Terveydenhuollon ammattihenkilöt 31.12.2001, Stakes 5/2002.) Arvioi kuvaajan perusteella

a) lääkäreiden mediaani-ikä
b) ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta alitti
c) ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta ylitti
d) kuinka monta prosenttia lääkärikunnasta oli 40 vuotta täyttäneitä
e) kuinka monta prosenttia enemmän oli alle 35-vuotiaita lääkäreitä kuin 55 vuotta täyttäneitä. [s04, 3]



632 Kutsuilla on 10 avioparia. Jokainen läsnäolija kättelee jokaista muuta paitsi aviopuolisoaan. Kuinka monta kättelyä suoritetaan? [k98, 3b]

633 Luvuista 100, 101, …, 999 valitaan umpimähkään yksi. Kuinka suurella todennäköisyydellä se on palindromi eli sellainen luku kuten 121, joka etu- ja takaperin luettuna on sama? [k94, 4c]

634 Suomalaisten veriryhmäjakauma on seuraava: A 44 %, B 17 %, AB 8 % ja O 31 %. Millä todennäköisyydellä puolisot kuuluvat samaan veriryhmään? [s93, 4]

635 Laite koostuu kolmesta toiminnallisesti riippumattomasta komponentista *A*, *B* ja *C*, joiden vikaantumistodennäköisyydet takuuaikana ovat $p_A = 0{,}01$, $p_B = 0{,}007$ ja $p_C = 0{,}05$. Laite ei toimi, jos yksikin komponenteista on viallinen. Mikä on laitteen vikaantumistodennäköisyys takuuaikana? Luotettavuuden parantamiseksi komponentti *C* kahdennetaan, ts. laite varustetaan kahdella rinnakkaisella, toisistaan riippumattomalla komponentilla *C*, ja riittää, että ainakin toinen näistä toimii. Mikä on tällöin vikaantumistodennäköisyys takuuaikana? [S04, 5]

636 Eräässä matematiikan kokeessa arvosanojen jakauma oli seuraava:

4	5	6	7	8	9	10
1,3 %	9,8 %	15,8 %	20,3 %	23,3 %	23,4 %	6,1 %

Laske arvosanojen keskiarvo. [s01, 5]

637 Eräällä paikkakunnalla sataa 60 prosentin todennäköisyydellä, jos edellisenä päivänä on satanut; poutasään todennäköisyys on tällöin 40 prosenttia. Jos taas edellisenä päivänä on ollut pouta, sateen todennäköisyys on vain 20 prosenttia ja poudan todennäköisyys vastaavasti 80 prosenttia. Millä todennäköisyydellä ylihuomenna sataa, kun tänään on pouta? [S01, 5]

638 Kun eräällä luokalla jokainen oppilas antoi valokuvansa jokaiselle luokkatoverilleen, vaihtoi 1122 valokuvaa omistajaa. Kuinka monta oppilasta luokalla oli? [k92, 5b]

639 Laatikossa A on 3 valkoista ja 2 mustaa palloa sekä laatikossa B 4 valkoista ja 4 mustaa palloa. Laatikosta A siirretään yksi pallo laatikkoon B. Tämän jälkeen otetaan laatikosta B yksi pallo. Millä todennäköisyydellä tämä pallo on valkoinen? [K82, 5b]

640 Aatu yrittää lähettää matkapuhelimella näppäimiin katsomatta kahdeksankirjaimisen tekstiviestin. Puhelimen kussakin näppäimessä on kolme eri kirjainta, joista ensimmäinen saadaan esille painamalla näppäintä kerran, toinen näppäilemällä kahdesti ja kolmas näppäilemällä kolmesti. Aatu muistaa, missä näppäimissä tarvittavat kirjaimet ovat, ja painaa oikeita näppäimiä, mutta hän ei muista kirjainten järjestystä näppäimissä, vaan hänen valintansa on joka kerta umpimähkäinen. Millä todennäköisyydellä viesti on aivan oikein? Millä todennäköisyydellä viestissä on tasan yksi virhe? [k03, 6]

641 Koulut päättyvät keväisin 31.5. tai, jos tämä on sunnuntai, sitä edeltävänä päivänä. Millä todennäköisyydellä umpimähkään valittuna keväänä koulu päättyy lauantaina? [s80, 6b]

642 Erään teollisuustuotteen laaduntarkkailussa löytyy viallisia kappaleita keskimäärin 3 %. Kuinka monta kappaletta on tutkittava, jotta todennäköisyys sille, että löytyy ainakin yksi viallinen kappale, olisi vähintään 0,90? [S78, 6a]

643 Kymmenestä henkilöstä, joiden joukossa on kaksi veljestä, muodostetaan arpomalla kaksi viisihenkistä työryhmää. Millä todennäköisyydellä veljekset joutuvat eri ryhmiin? [K78, 6b]

644 Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli välillä 200 g–210 g? [K01, 7]

645 Todennäköisyys, että erään tulppaanilajikkeen sipuli itää, on 0,7. Kuinka monta sipulia on vähintään istutettava, jotta niistä ainakin kaksi itäisi yli 99 % todennäköisyydellä? [S00, 7]

646 Kukansiemeniä sisältävän säkin kyljessä kerrotaan, että siementen itämistodennäköisyys on 95 % ja että 5 % säkin sisällöstä on samannäköisiä rikkaruohon siemeniä. Säkin siemenet jaetaan kahdenkymmenen siemenen pusseihin. Millä todennäköisyydellä puutarhuri, joka kylvää tällaisen pussillisen siemeniä, saa vähintään 19 haluamaansa kukantainta? Millä todennäköisyydellä hän kylvää vähintään yhden rikkaruohon siemenen? [S99, 7a]

647 Neliön kärkinä ovat pisteet (5, 5), (2, 2), (5, –1) ja (8, 2). Vektorin $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j}$ alkupiste on (–2, 3) ja loppupiste sattumanvaraisesti valittu mainitun neliön sisäpiste. Kuinka suurella todennäköisyydellä on 1° $a > 0$ 2° $b > 0$? [s92, 7a]

648 Pussituskonetta säätämällä pussien keskisisältö voidaan valita väliltä 300 g … 500 g. Mittausten mukaan sisällön massa on tällöin normaalisti jakautunut hajonnan ollessa 15 g. Miten suureksi pussin keskisisältö olisi säädettävä, kun vaaditaan, että pussin sisältö on 95 % todennäköisyydellä yli 400 g? [k91, 7]

649 Oletetaan seuraavien todennäköisyyksien vallitsevan:

1° Jos jonakin päivänä ei sada, niin seuraavana päivänä sataa todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

2° Jos jonakin päivänä sataa, niin seuraavana päivänä sataa todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.

Laske, millä todennäköisyydellä ylihuomenna sataa, jos tänään sataa. [s77, 7a]

650 Kolminumeroisen luvun numerot valitaan joukosta {1, 2, 3, 4, 5, 6} arpomalla. Laske, millä todennäköisyydellä saatu luku on suurempi kuin 450. [s82, 7a]

651 Kahta noppaa heitettäessä saadut pisteluvut olkoot x ja y. Määritä satunnaismuuttujan $|x - y|$ todennäköisyysjakauma ja odotusarvo (keskiarvo). [K77, 7b]

652 Kolmihenkisen toimikunnan jäsenet valitaan arvalla kolmen naisen ja viiden miehen joukosta. Millä todennäköisyydellä ainakin kaksi miestä joutuu toimikuntaan? [K76, 7b]

653 Yritys valmistaa pallon muotoisia kaasusäiliöitä, joiden tilavuuden on tarkoitus olla 5000 litraa. Enintään 65 litran poikkeama jompaankumpaan suuntaan hyväksytään. Laske tavoitteena oleva säiliön halkaisija ja virherajojen mukaiset halkaisijat. Millä todennäköisyydellä valmistusprosessissa syntyy hyväksyttäviä säiliöitä, kun halkaisijoiden poikkeamat tavoitteesta ovat normaalisti jakautuneita parametrein $\mu = 0$ cm, $\sigma = 1{,}75$ cm? [K06, 8]

654 Laatikossa on 2 ruskeaa, 6 mustaa ja 8 sinistä matkapuhelimen kuorta. Laatikosta otetaan umpimähkään kaksi kuorta. Millä todennäköisyydellä kuoret ovat samanväriset? [S05, 8]

655 Erään satunnaismuuttujan x tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \frac{1}{5}x, & \text{kun } 0 \le x < 2, \\ -\frac{2}{15}x + \frac{2}{3}, & \text{kun } 2 \le x < 5, \\ 0, & \text{kun } x \ge 5 \end{cases}$$

a) Piirrä tiheysfunktion kuvaaja.
b) Laske todennäköisyydet $P(x \le 1)$, $P(1 < x \le 3)$ ja $P(x > 3)$. [S03, 8]

656 Puhelinkeskukseen tulevien puhelujen määrä noudattaa ns. *Poissonin jakaumaa:* todennäköisyys, että minuutissa tulee n (≥ 0) puhelua, on $p_n = \frac{a^n}{n!}\mathrm{e}^{-a}$, jossa vakio a kuvaa keskuksen ruuhkaisuutta. Laske todennäköisyys, että keskukseen tulee minuutissa ainakin 5 puhelua, kun $a = 3$. [K00, 8]

657 Mikä on todennäköisyys, että funktion $f(x) = px^2 + x + p$ pienin arvo on suurempi kuin 1, kun p määrätään heittämällä noppaa kerran? [s97, 8b]

658 Mikä on todennäköisyys sille, että lukujonosta 1, 2, …, 120 umpimähkään valitusta kahdesta eri luvusta toinen on > 70 ja toinen toinen < 40? [S86, 8a]

659 Laatikossa A on kolme mustaa palloa ja laatikossa B kolme valkoista palloa. Laatikosta A siirretään umpimähkään valittu pallo laatikkoon B, josta tämän jälkeen siirretään umpimähkään valittu pallo laatikkoon A. Näin tehdään kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä laatikossa A on tämän jälkeen kolme valkoista palloa? [s85, 8b]

660 Laatikossa on 2 valkoista ja 3 mustaa palloa. Siitä otetaan umpimähkään kaksi palloa samanaikaisesti. Mikä on todennäköisyys sille, että
1° pallot ovat eriväriset
2° molemmat pallot ovat valkoisia
3° molemmat pallot ovat mustia? [S80, 8b]

661 Leirikoulun hyväksi järjestetyissä arpajaisissa ilmoitettiin, että joka 20:s arpa voittaa. Kuinka monta arpaa on ostettava, jotta todennäköisyys ainakin yhteen voittoon olisi yli 50 %? [K04, 9]

662 Reaaliluvut a ja b arvotaan väliltä $[0, 3]$. Millä todennäköisyydellä on $\log_{10}(2a + 3b) > 1$? [K02, 9]

663 On annettu ympyrät K_1: $x^2 + y^2 + 4y = 0$ ja K_2: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 28 = 0$ sekä piste $P = (4, 0)$. Millä todennäköisyydellä pisteen P kautta umpimähkään piirretty suora kohtaa sekä ympyrän K_1 että ympyrän K_2? [K99, 9a]

664 Cup-kilpailu järjestetään siten, että osallistujat arvotaan kullakin kierroksella pareiksi. Kukin pari ottelee keskenään, ja voittaja jatkaa seuraavalle kierrokselle, jolla taas arvotaan jäljellä olevat osallistujat pareiksi. Näin jatketaan, kunnes jäljellä on enää kaksi osallistujaa, jotka ottelevat loppuottelun. Kilpailuun on ilmoittautunut 32 osallistujaa. Millä todennäköisyydellä loppuottelussa on kaksi parasta osallistujaa? [s98, 9a]

665 Erään mallin mukaan tietyssä tilanteessa sattuvien auto-onnettomuuksien todennäköisyys riippuu kuljettajan veren alkoholipitoisuudesta seuraavasti. Jos veressä on v promillea alkoholia, on todennäköisyys $R(v) = e^{2,14v}$ prosenttia. Millä v:n arvoilla malli ei voi vastata todellisuutta? Kuinka suuri on mallin mukainen todennäköisyys, jos veressä on 0,5 promillea alkoholia? Kuinka paljon alkoholia on veressä, jos mallin mukaan todennäköisyys on 15 %? [s92, 9a]

666 Noppaa heitetään neljä kertaa. Millä todennäköisyydellä kaikki silmäluvut ovat erisuuria? [k79, 9]

667 Tiedetään, että eräässä nelilapsisessa perheessä ainakin yksi lapsista on tyttö. Mikä on tällöin todennäköisyys, että kaikki lapset ovat tyttöjä? Jos tiedetään, että ainakin kaksi lapsista on tyttöjä, mikä on todennäköisyys, että perheessä on kaksi poikaa? Oletetaan, että poikia ja tyttöjä syntyy yhtä suurella todennäköisyydellä. Millaiset tulokset saadaan, jos käytetäänkin tilastojen antamia todennäköisyyksiä: poikien syntymistodennäköisyys on $p = 0{,}51$ ja tyttöjen $t = 0{,}49$? Sukupuolen määräytymiset oletetaan riippumattomiksi tapahtumiksi. [S06, 10]

668 Erään 16 500 ihmistä käsittävän ryhmän pituuden oletetaan noudattavan normaalijakaumaa $N(p; \sigma)$, jossa $p = 175$ cm ja $\sigma = 5$ cm. Ryhmän älykkyysosamäärän oletetaan samoin jakautuvan normaalisti $N(102; 12)$. Mikä on todennäköisyys, että ryhmästä löytyy ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja älykkyysosamäärä yli 140? Ryhmän kengännumerot ovat nekin jakautuneet normaalisti $N(41{,}6; 0{,}6)$. Voidaanko samalla päättelyllä kuin yllä laskea todennäköisyys, että ryhmässä on ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja kengännumero vähintään 45? Perustele. [s97, 10]

669 Kuusinumeroinen puhelinnumero alkaa numerolla 4 ja muut numerot ovat määräytyneet sattumanvaraisesti. Millä todennäköisyydellä luvussa esiintyy ainakin kerran peräkkäin numerot 1 ja 3 tässä järjestyksessä? [S72, 12]

670 Lukujonon $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmeettinen keskiarvo on μ ja keskihajonta σ.

Osoita, että $\sigma^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - \mu^2$. [S71, 12]

671 Kilon sokeripusseja täytetään koneellisesti. Pussituskone voidaan asettaa täyttämään pusseja, joiden paino noudattaa normaalijakaumaa keskiarvona koneelle asetettu paino ja keskihajontana 8,0 g. Kuinka suureksi sokeripussin paino tulee asettaa koneeseen, jotta 95 % sokeripusseista olisi painoltaan vähintään 1000 g? [k05, 15]

672 Todennäköisyys, että asiakas palauttaa postimyyntiliikkeestä tilaamansa tuotteen, on 11 %. Mikä on todennäköisyys, että postimyyntiliikkeen 2500 asiakkaasta vähintään 300 palauttaa tilaamansa tuotteen? Opastus: Approksimoi binomijakaumaa normaalijakaumalla, jonka tunnuslukuina ovat binomijakauman keskiarvo ja hajonta. [s03, 15]

7 Differentiaalilaskenta

7.1 Funktio

701 Olkoon $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ja $g(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$.

a) Laske $f(-2)$. b) Laske $g\left(\frac{1}{2}\right)$. c) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$. [K04, 1]

702 Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{2x^2 + x - 6}}$ a) määrittelyjoukko b) nollakohdat.

703 Olkoon f: $f(x) = x^3 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Muodosta funktio g ja ilmoita sen määrittelyjoukko.

a) g: $g(x) = f(-x)$
b) g: $g(x) = f(x - 1)$
c) g: $g(x) = f(x^{-1})$
d) g: $g(x) = [f(x)]^{-1}$

704 Millä a:n arvoilla funktio $f(x) = -x^2 + ax + a - 3$ saa vain negatiivisia arvoja? [S05, 4]

705 Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$, $x > 3$, käänteisfunktio f^{-1}. Millä välillä tämä on määritelty? Osoita laskemalla, että $f^{-1}(f(x)) = x$, kun $x > 3$. [K03, 9]

706 Laske $f(2) + f(3)$, kun $f(x) = 1/x$. Osoita, että $f(2) + f(3) \neq f(5)$. Osoita edelleen, että millään reaaliluvulla x ($x \neq 0$, $x \neq -2$) ei päde $f(2) + f(x) = f(2 + x)$. [s01, 13]

707 Osoita, että funktio

$$f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x\sqrt{2 + \sqrt{x}} - x\sqrt[4]{x}}\ \ \sqrt{x\sqrt{2 + \sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}}$$

on lineaarinen funktio, ja piirrä sen kuvaaja. [S97, 6a]

708 Osoita, että kuvauksella f: $[-2, 0] \to [0, 16]$, $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ on käänteiskuvaus ja johda sille lauseke. [K78, 7a]

7.2 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

709 Onko funktio $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2, & x < 1 \\ -x^2 + 4x, & x \geq 1 \end{cases}$ jatkuva?

710 Määritä vakio a siten, että funktio f on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & \text{kun } x < 3 \\ 2ax + 2, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \dfrac{3 - x}{2ax^2 - 10x - 3a}$

711 a) Määritä $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{x^2 - x}$. [S77, 1]

b) Määritä $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$. [S79, 4]

712 Määritä raja-arvo. a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{6x - 2x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+9}}{x+2}$

713 Laske $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x+4| - |2-3x|}{3x - x^2}$.

714 a) Määrää vakio a siten, että funktiolla $\dfrac{ax^2 - 6x + 4}{x^2 - x - 2}$ on äärellinen raja-arvo, kun $x \to 2$. Mikä tämä raja-arvo on? [K72, 5]

b) Määritä vakio a niin, että $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + a}{x^2 - x - 2} = \dfrac{1}{3}$.

c) Määritä sellaiset vakion a arvot, että $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-2x^2 + ax + a^2}{x - 2}$ on olemassa. Laske kyseinen raja-arvo.

715 a) Perustele, miksi polynomifunktiolla $f(x) = x^3 - 4x - 2$ on nollakohta välillä $]2, 3[$. Etsi haarukoimalla tämä nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella. [k00, 11]

b) Osoita, että yhtälöllä $x^3 + x + 1 = 0$ on yksi ja vain yksi reaalijuuri. Määritä tämän juuren likiarvo 4:n desimaalin tarkkuudella ja selosta lyhyesti käyttämäsi menetelmä. [K81, 7a]

c) Osoita, että yhtälöllä $2x^4 + 6x = -3$ on ainakin kaksi reaalijuurta.

716 Lauseke $\dfrac{ax}{x-1} + \dfrac{x^3 + b}{(x-1)^2}$ määrittelee jatkuvan funktion arvoilla $x \neq 1$. Miten vakiot a ja b on valittava, jotta kyseinen funktio voitaisiin saada jatkuvaksi myös pisteessä $x = 1$? [S81, 9a]

717 Funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sanotaan *parittomaksi,* jos $f(-x) = -f(x)$ jokaisella reaaliluvulla x. Anna esimerkki parittomasta funktiosta, joka on kasvava $\mathbb{R}$:ssä, ja parittomasta funktiosta, joka ei ole kasvava $\mathbb{R}$:ssä. Osoita, että $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, jos f on pariton ja jatkuva. [K01, 10]

7.3 Derivaatta

718 Olkoon $f(x) = x^2 - 3x - 5$. a) Ratkaise yhtälö $f(x) = 0$. b) Millä x:n arvoilla on $f'(x) = 1$? c) Piirrä derivaattafunktion f' kuvaaja. [S03, 1]

719 Millä arvoilla x funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ derivaatta saa arvon nolla? [S97, 1]

720 Määritä funktion f: $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ derivaatan nollakohdat. [S85, 1a]

721 Määritä funktion f derivaatan nollakohdat.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x + 7$ b) $f(x) = (x^2 - 2x)(2x^3 - 3x^2)$ c) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{1 - x}$

722 Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ derivaatta pisteessä $x = 2$ laskemalla erotusosamäärän raja-arvo. [S04, 10]

723 Määritä käyrän $y = x^3$ pisteeseen (2, 8) piirretyn tangentin yhtälö. Missä pisteessä tangentti leikkaa y-akselin? Määritä tangentin, y-akselin ja suoran $y = 8$ määräämän kolmion pinta-ala. [K01, 2]

724 Missä kulmassa käyrät $y = x^3 - 6$ ja $y = 2x^2 - 3x$ leikkaavat toisensa? Anna tulos yhden desimaalin tarkkuudella.

ALKEISFUNKTIOT

725 Millä parametrin a arvoilla funktio $f(x) = 2(a^2 - 9)x - 4a^2 + 1$ on
a) kasvava b) aidosti kasvava c) vakio?

726 Kolmannen asteen polynomilla $p(x)$ on kaksinkertainen nollakohta $x = 2$ ja $p(3) = 15$, $p'(1) = 0$. Määritä $p(x)$. [S00, 6]

727 Määritä funktion f derivaatta. a) $f(x) = \dfrac{(2x + 5)^6}{3}$ b) $f(x) = x \ln 3x$

c) $f(x) = 5e^{2x-3}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$, $x > 1$ e) $f(x) = \sin 3x - x \ln x$

f) $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2} - 4$ $(x > 0)$ [K06, 2a]

728 a) Derivoi lauseke $(x^2 + 1)e^{2x}$. [S06, 2a]

b) Muodosta funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2}$ derivaatta ja tutki, millä x:n arvoilla se on negatiivinen. [K99, 4]

729 Määritä funktion $f\colon f(x) = \ln(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$ derivaatta pisteessä $x = 3$. [S84, 1]

730 Määritä yhtälön $(1 + x^2)^3 = 1$ reaalijuuret. [S89, 1a]

731 Määritä yhtälöiden $(1 - x)^7 = -10^{-14}$, $(1 - x)^{14} = 10^{-14}$, $(1 - x)^{21} = 1$ reaalijuuret. [S85, 1a]

732 Ratkaise epäyhtälö $(x - 1)^4 < 10^{-8}$. [K85, 4b]

733 a) Määritä funktion $f(x) = 1 - 2\sin 2x$ suurin ja pienin arvo sekä nollakohdat.

b) Määritä funktion $f(x) = 1 - \tan^2 2x$ nollakohdat.

734 Sievennä lauseke.

a) $\log(xy^2) - 2\log y \quad (x > 0,\ y > 0)$ [K06, 2c]

b) $\ln e^{2x^2+1} + \ln e^{-x^2} - x^2$

c) $3\ln 2 + 2\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 4 - 2\ln 10$

735 a) Millä x:n arvolla on $2^x = 1$? [k07, 6a]

b) Ratkaise yhtälö $2^{x^2-2} = 1$. [k07, 6b]

c) Millä x:n arvolla on $e^x = 1$? [K02, 2a]

d) Ratkaise yhtälö $e^{x^3+4x^2+x} = 1$. [K02, 2b]

736 a) Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2^x = 8^y. \end{cases}$ [K03, 5a]

b) Ratkaise epäyhtälö $\ln(x^2 - 1) - 2\ln(x + 1) < -1$.

737 a) Määritä vakiot a ja b siten, että funktio $f(x) = a\sin x + b$ täyttää ehdot $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$. [K73, 1]

b) Funktiolla $f(x) = Ae^x + 2Be^{-x}$ on ominaisuudet $f(0) = 1$ ja $f'(0) = 2$. Määritä kertoimet A ja B. [S02, 3]

738 a) Floridan rannikolta on löydetty fossiilisia hain hampaita, jotka ovat kuuluneet kymmeniätuhansia vuosia sitten sukupuuttoon kuolleelle valkohain esi-isälle. Kuinka vanha on hain hammas, kun sen sisältämän radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14-pitoisuus on pienentynyt 9 prosenttiin elävässä organismissa olevasta C-14-pitoisuudesta? Isotoopin C-14 puoliintumisaika on noin 5730 vuotta. [s00, 7]

b) Golfin pelaaja onnistuu lyönnissään, ja pallo putoaa 50,0 metrin päässä olevaan reikään. Missä kulmassa pallo putoaa reikään, kun lentoradan oletetaan olevan paraabeli? Lentoradan huippu on 20,0 metrin korkeudella. [k00, 13]

739 Totea, että differentiaaliyhtälön $y' + 2\sin x = y$ ratkaisu alkuehdolla $y(0) = 1$ on $y(x) = \sin x + \cos x$. [S03, 15a]

740 Määritä funktion $f(x) = x^3 + x - 2$ käänteisfunktion derivaatta $(f^{-1})'(0)$.

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

741 a) Mitä arvoja funktion $-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 1$ derivaatta voi saada? [k03, 8]

b) Millä vakion a arvoilla polynomifunktion $x^3 + ax^2 + 3x$ derivaatta on kaikkialla positiivinen? [K76, 3]

742 a) Määritä käyrän $y = x^2 - \sqrt{x^2 + 3}$ kohtaan $x = -1$ piirrettyjen tangentin ja normaalin yhtälöt.

b) Määritä käyrän $y = 3x^2 + x^3$ piste, johon piirretty tangentti laskee jyrkimmin.

c) Määritä se paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ piste, jossa paraabelin tangentin suuntakulma on $+45°$. [K04, 5]

d) Osoita, että käyrillä $x^2 - 6x - 3 + 4y = 0$ ja $2x^2 + 1 - y = 0$ on yksi yhteinen piste, jossa ne sivuavat toisiaan, so. niillä on yhteinen tangentti. Määritä tämän tangentin yhtälö. [S01, 4]

e) Derivoi funktio $f(x) = e^{2x-2} + x^3 - 1$. Määritä käyrän $y = e^{2x-2} + x^3 - 1$ pisteeseen $(1, 1)$ piirretyn tangentin yhtälö. Määritä sen janan pituus, jonka koordinaattiakselit erottavat edellisen kohdan tangentista. [S03, 3]

f) Hyperbelille $y = \frac{1}{x}$ asetetaan pisteeseen $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ tangentti. Määritä sen kolmion ala, jonka tämä tangentti muodostaa yhdessä koordinaattiakselien kanssa.

g) Mikä yhteys on funktion f derivaatan $f'(a)$ ja pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn funktion f kuvaajan tangentin välillä? Määritä $f'(1)$, kun funktion f kuvaajalla on pisteessä $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ tangenttina suora $4y + 5x = 2$.

Voiko funktion f, $f(x) = x^2$ kuvaajalla olla tangenttina suora $y = x - 2$ käyrän jossakin pisteessä? [s00, 6]

h) Yhtälö $2x^2 + y^2 = 6$ määrittää pisteen $x = 1$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = y(x)$, jolle pätee $y(1) = -2$. Määritä funktion kuvaajalle pisteeseen $(1, -2)$ asetetun tangentin yhtälö ja laske, missä pisteessä tangentti leikkaa x-akselin. [S06, 11]

743 a) Olkoon $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$. Laske $f(2 \ln 2)$ ja ratkaise yhtälö $f(x) = \dfrac{1}{6}$. [S90, 1a]

b) On annettu funktiot $f(x) = e^{2x}$ ja $g(x) = \ln x$. Ratkaise yhtälö $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x^3)$. [K98, 5a]

c) Ratkaise yhtälö $e^x + e^{1-x} - e - 1 = 0$. [S84, 6a]

744 a) Toisen asteen polynomin kuvaajan huippu on pisteessä $(-1, 2)$, ja kuvaaja kulkee pisteen $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ kautta. Määritä polynomi ja sen derivaatta. Piirrä polynomin kuvaaja. [s99, 6b]

b) Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja kulkee kahden pisteen A ja B kautta. Osoita, että pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on sama kuin pisteissä A ja B laskettujen funktion f derivaatan arvojen keskiarvo.

745 a) Pallo potkaistaan ilmaan 30°:n kulmassa, ja se lentää 50 m:n päähän. Kuinka korkealla pallo käy, jos sen lentorata on paraabeli, jonka akseli on pystysuora. [K86, 7]

b) Kahden metrin korkeudelta heitetty pallo osuu viiden metrin päässä olevan puun runkoon viiden metrin korkeudella. Pallon lentoratana on paraabeli, jonka huippu on heittäjän ja puun välissä kahden metrin etäisyydellä puusta. Laske heittokulma. [K91, 6]

746 a) Määrittämällä Äänisen rannoilla tehtyjen hautalöytöjen luiden ikä radioaktiivisen hiili-isotoopin C-14 pitoisuuden avulla on selvitetty, että alueella on ollut asutusta jo 7500 vuotta sitten. Kuinka monta prosenttia luiden radioaktiivisen hiilen määrä on vähentynyt tänä aikana, kun eliön kuoltua hiilen määrä puoliintuu 5730 vuodessa? Kuinka monta vuotta tarvitaan lisää, jotta radioaktiivisen hiilen määrä on alentunut 30 prosenttiin alkuperäisestä arvosta? [k04, 12]

b) Lääkeaineen pitoisuus puoliintuu elimistössä yksilöllisesti vaihdellen 15–18 tunnissa. Lääkityksen päätyttyä aineen voidaan katsoa poistuvan elimistöstä ajassa, joka on viisi kertaa puoliintumisaika. Kuinka monta prosenttia lääkeainetta on tuolloin kuitenkin vielä jäljellä? Kuinka monta tuntia lääkityksen jälkeen on odotettava, jotta 99 % lääkeaineesta on poistunut elimistöstä? [s04, 12]

747 a) Maanjäristyksessä vapautuvan seismisen energian E ja Richterin asteikon lukeman M välillä on yhteys $\log_{10} E = 11{,}8 + 1{,}5M$. Rakennus on mitoitettu kestämään järistys, jossa vapautuva seisminen energia on 50 % suurempi kuin seisminen energia järistyksessä, jonka voimakkuus Richterin asteikolla on 6,8. Kuinka voimakkaan järistyksen rakennus kestää Richterin asteikolla mitattuna? [k05, 13]

b) Pieneläinklinikassa käytetään kerta-annoksena annettavaa nukutusainetta, jonka määrä elimistössä vähenee eksponentiaalisesti siten, että kolmen tunnin kuluttua aineesta on enää puolet jäljellä. Leikkauksen ajan on nukutusainetta elimistössä oltava vähintään 23 mg eläimen kutakin painokiloa kohti. Kuinka suuri määrä nukutusainetta on vähintään annettava 20 kg painavalle koiralle leikkausta varten, kun leikkauksen on arvioitu kestävään 1 h 15 min? [k01, 8]

748 a) Osoita, että funktio $f\colon f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5x$ on koko $\mathbb{R}$:ssä aidosti kasvava. [S88, 5]

b) Funktio f toteuttaa kaikilla x:n arvoilla epäyhtälön $f'(x) > kf(x)$ [k vakio]. Olkoon $g(x) = e^{-kx}f(x)$. Osoita, että funktio g on kaikkialla kasvava. [S75, 5a]

749 a) Tiedetään, että funktio f kasvaa varsin tarkoin lineaarisesti (suoraviivaisesti) välillä [1,9995; 2,0005]. Lisäksi tiedetään funktion arvot $f(2) = 3{,}7458053$ ja $f(2{,}0005) = 3{,}7458664$. Määritä tämän perusteella likiarvo derivaatalle $f'(2)$. [K06, 12]

b) Osoita, että funktio $y(x) = \dfrac{(x-a)^2 - 1}{x - a}$ on differentiaaliyhtälön $(y')^2 - (y^2 + 4)(y' - 1) = 0$ ratkaisu vakion a kaikilla reaaliarvoilla. Millä vakion a arvoilla funktio toteuttaa alkuehdon $y(1) = 2$? [S06, 14]

750 a) Tarkastellaan lauseketta $L(x) = \dfrac{\tan x - \sqrt{3}}{x - \dfrac{\pi}{3}}$. Laske lauseketta muokkaamatta sille laskimella likiarvo, kun $x = \dfrac{\pi}{3} + 10^{-3n}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Määritä $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} L(x)$ tulkitsemalla lauseke sopivan funktion erotusosamääräksi. Mitä voidaan sanoa a-kohdassa lasketuista likiarvoista? [S05, 13]

b) Olkoon funktio f jatkuva origossa. Määritä erotusosamäärän avulla funktion $g(x) = xf(x)$ derivaatta origossa. Voidaanko tulosta soveltaa funktioon $f(x) = |x| + 1$? [K05, 12]

751 a) Tutki, millainen luvun q tulee olla, jotta polynomifunktio $f(x) = x^3 + x^2 + qx + 1$ olisi ainakin jollakin välillä vähenevä. Mikä on tällöin tämä väli? [k02, 11]

b) Tyhjennettävässä vesisäiliössä olevan veden tilavuus litroina on $V(t) = 520(20 - t)^2$, jossa t on aika minuutteina. Säiliö tyhjenee nopeudella $q(t) = -V'(t)$ (litraa/min). Säiliön tyhjentäminen alkaa hetkellä $t = 0$. Milloin säiliö on tyhjä? Piirrä funktion V kuvaaja. Määritä funktio q ja piirrä sen kuvaaja. Milloin tyhjenemisnopeus on suurimmillaan? [k01, 12]

752 Funktio f määritellään seuraavasti: $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$, kun $x > 0$. Osoita, että käänteisfunktio f^{-1} on olemassa, ja määritä $(f^{-1})'(0)$. [S81, 9b]

753 a) Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *injektio,* jos $f(x) \neq f(y)$ aina, kun $x \neq y$. Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *surjektio*, jos jokaista reaalilukua y kohti on olemassa sellainen reaaliluku x, että $y = f(x)$. Anna esimerkki kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on injektio, ja samoin kuvauksesta, joka ei ole injektio. Onko kuvaus $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ injektio? Anna esimerkki kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on injektio mutta ei surjektio. [K02, 12]

b) Olkoon f funktio, joka on jatkuva arvolla $x = 0$ ja toteuttaa kaikilla x:n arvoilla ehdon $f(x)f(-x) = |x|$. Osoita, että f ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta. [K85, 10]

754 a) Laske funktion $e^x + e^{-3x}$ tarkka arvo, kun $e^{2x} = 9$. [K93, 3a]

b) Tutki, mitkä tason pisteet (x, y) toteuttavat yhtälön $\log_y x = \log_x y$. Piirrä kuvio. [S00, 12]

755 a) Funktio f on määritelty kaikilla reaaliarvoilla ja täyttää seuraavat ehdot:

1) on olemassa äärellinen raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x, y.

Osoita, että funktiolla f on derivaatta jokaisella arvolla x. [S76, 7a]

b) Funktio f toteuttaa välillä $-1 < x < 1$ yhtälön $f(x) = 1 + 2x + x^2 f(x^2)$ ja lisäksi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Määritä $f'(0)$ derivaatan määritelmän nojalla. [K75, 9]

756 a) Funktiolla f on derivaatta pisteessä a, ja derivaatan arvo on k. Määritä tämän nojalla $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$. [S86, 10a]

b) Funktio f on määritelty välillä $]-1, 1[$, ja derivaatta f' on olemassa pisteessä $x = 0$ (mutta ei välttämättä muualla).

Määritä $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2) - f(-x^2)}{x^2}$. [K91, 9]

757 Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on parillinen (so. kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f(x)$) ja derivoituva. Osoita, että $f'(0) = 0$. [S83, 7]

758 Osoita, että yhtälöillä $x - \cos x = 0$ ja $x - \cos(\cos x) = 0$ on kummallakin täsmälleen yksi juuri, joka lisäksi on yhtälöille yhteinen. [K86, 10a]

7.4 Sovelluksia

759 Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä. [k06, 7]

760 Määritä funktion $f(x) = \dfrac{40x}{x^2 - 9}$, $-2 \le x \le 1$, suurin ja pienin arvo.

761 Määritä funktion $f(x) = x(3 - 4x - x^2)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-4, -1[$.

762 Määritä funktion $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ ääriarvot.

763 Etsi funktion $\ln(x^3 - x)$ määrittelyalue ja ääriarvot. [S04, 6]

764 Osoita, että yhtälöllä $x - \ln x = 0$ ei ole reaalijuuria. [K81, 5]

765 Määritä kulma, johon suoran ympyräkartion muotoisen kodan seinät on pystytettävä, jotta kodan tilavuus on mahdollisimman suuri. Sivujana on 10,0 m. Mikä on tällöin kodan tilavuus?

766 Yksikkösäteisen pallon sisällä on tilavuudeltaan mahdollisimman suuri suora ympyräpohjainen lieriö. Määritä lieriön korkeus ja pohjaympyrän säde. Laske lieriön ja pallon tilavuuksien suhde. [K03, 8]

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

767 Määritä funktion $f(x) = -2x^3 - 6x^2$, $-1 \le x \le 1$, suurin ja pienin arvo.

768 Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}$ välillä $[-1, 4]$.

a) Määritä funktion suurin ja pienin arvo annetulla välillä ja piirrä funktion kuvaaja.

b) Määritä käyrän $y = f(x)$ tangentin kulmakertoimen suurin ja pienin arvo annetulla välillä. [s06, 9]

769 a) Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2]$.

b) Määritä vakio a siten, että funktion $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + a$ pienin arvo välillä $[0, 2]$ on $-4\frac{1}{2}$. Mikä on tällöin funktion suurin arvo ko. välillä? [s02, 13]

770 Olkoon $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$. Kumpi on suurempi, $f(a)$ vai $f(b)$, kun $a = 1 + 10^{-1500}$ ja $b = 1 + 2 \cdot 10^{-1500}$? [S05, 7]

771 Määritä funktion $f(x) = x(x + 4)^3$ ääriarvopisteet.

772 Osoita, että funktioilla $f(x) = -4x^3$ ja $g(x) = x^3 + x$ ei ole ääriarvoja, mutta summafunktiolla $h(x) = f(x) + g(x)$ on. Mitkä ovat nämä ääriarvot? [s04, 10]

773 Määritä funktion $\ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ suurin arvo välillä $0 \le x \le 1$. [S73, 3]

774 Määritä funktion f: $f(x) = e^x - x$ pienin arvo. [S90, 2a]

775 Määritä funktion $f(x) = (1 - x)^2 e^x$ pienin ja suurin arvo välillä $]0, e[$.

776 Neljännen asteen polynomilla on paikallinen maksimi 16, kun $x = -1$. Origossa polynomi saa arvon 11. Polynomin kuvaajan pisteeseen (1, 11) piirretyn tangentin kulmakerroin on 0. Muodosta yhtälöryhmä, josta polynomin kertoimet voidaan ratkaista. Ratkaise tämä laskinta käyttämättä. Mikä on kyseinen polynomi? [K05, 10]

777 Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + 6x - 5}}$ pienin ja suurin arvo.

778 Määritä funktion $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ suurin ja pienin arvo. [S06, 6]

779 Osoita, että funktio $f(x) = 1 + x - 2^x$ on positiivinen välillä $0 < x < 1$. [S68, 7]

780 Osoita, että yhtälöllä $x - 2 \ln x = 0$ ei ole reaalijuuria. [S05, 11]

781 Osoita, että yhtälöllä $(x + 1)^3 = x$ on täsmälleen yksi reaalijuuri. [S92, 5]

782 Osoita, että x:n arvoilla $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ on $\tan x < 2x$. [K70, 9]

783 Määritä käyrän $y = \sqrt{1 - x}$ pisteeseen $(-1, \sqrt{2})$ piirretyn tangentin yhtälö ja osoita, että käyrä koko määrittelyjoukossaan (sivuamispistettä lukuun ottamatta) on tämän tangentin alapuolella. [S89, 8]

784 Todista, että $e^x + 2e^{-x} + x \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

785 Osoita, että yhtälöllä $e^{-x} + e^{x^2} - \sqrt{\dfrac{17}{5}} = 0$ on täsmälleen kaksi reaalijuurta. [K82, 10a]

786 Olkoon $x \geq 1$. Osoita, että $x^x - e^{x-1} \geq 0$. Millä x:n arvoilla pätee yhtäsuuruus? [K04, 11]

787 Pienien alumiinista valmistettavien suoran ympyräkartion muotoisten valaisinkupujen korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan summa on 18,6 cm. Määritä kartion pohjaympyrän säde siten, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä tämä tilavuus. [k06, 13]

788 Laskeva suora kulkee pisteen (3, 4) kautta siten, että sen ja koordinaattiakselien rajoittaman kolmion ala on mahdollisimman pieni. Määritä suoran kulmakerroin ja vastaava pienin ala. [S05, 9]

789 Määritä se pisteen (2, 3) kautta kulkevista suorista, joka positiivisten koordinaattiakselien kanssa rajoittaa mahdollisimman pienen kolmion. Mikä on tämän kolmion ala? [S93, 7b]

790 Mikä käyrän $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, tangenteista rajoittaa koordinaattiakselien kanssa mahdollisimman suuren kolmion, ja mikä on tämän kolmion ala? [S83, 6]

791 Kolmion yhtenä kärkenä on origo ja sen vastaisena sivuna käyrälle $y = 6 - \frac{x^2}{2}$ piirretty x-akselin suuntainen, sen yläpuolella oleva jänne. Kuinka suuri kolmion ala enintään voi olla? [s73, 8]

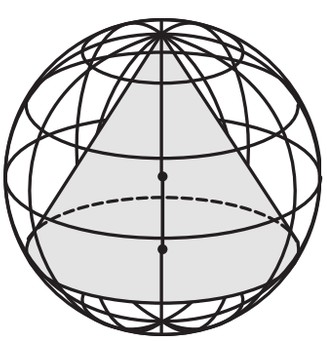
792 On tehtävä suorakulmion muotoinen aitaus, jonka yhtenä sivuna tai sivun osana on kymmenen metrin pituinen valmis suora seinä tai osa siitä ja jonka muun osan tekemiseen on käytettävissä 26 metriä aitaa. Kuinka suuri voi aitauksen ala enintään olla? [K72, 9]

793 Tulta syöksevät lohikäärmeet Draco ja Nid vartioivat solaa, ja solassa kulkeva joutuu menemään niiden välistä. Lohikäärmeiden välinen etäisyys on 200 kyynärää. Tulisuihkun vaikutus on suoraan verrannollinen lohikäärmeen kokoon ja kääntäen verrannollinen lohikäärmeestä mitatun etäisyyden kolmanteen potenssiin. Draco on kaksi kertaa niin suuri kuin Nid. Mistä kohtaa lohikäärmeiden välistä kulkijan on vaellettava, jotta hän selviäisi mahdollisimman vähällä? Anna vastaus kyynärän tarkkuudella. [K06, 10] (Täsmennys: missä tilanteessa lohikäärmeiden tulisuihkujen yhteisvaikutus on siis pienin?)

794 Mikä käyrän $y = x^4 - 7x^2$ pisteistä on lähinnä suoraa $y = 4x - 21$? Mikä on kyseinen lyhin etäisyys? Piirrä kuvio. [S04, 13]

795 Suoran ympyräkartion korkeus on h ja pohjan säde r. Sen sisään on piirretty toinen suora ympyräkartio, jonka pohjaympyrä on annetun kartoin vaipalla ja huippu annetun kartion pohjan keskipisteessä. Miten suuri on enintään jälkimmäisen kartion tilavuuden suhde annetun kartion tilavuuteen? [K88, 5a]

796 Pallon säde on 3. Määritä pallon sisään mahtuvan tilavuudeltaan mahdollisimman suuren suoran ympyräkartion tilavuus. Ympyräkartion kärki ja pohjaympyrän kehä ovat pallon pinnalla. Valitse muuttujaksi pohjan etäisyys pallon keskipisteestä. Ilmoita tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. [k07, 14]



797 a) Pallon sisään asetetaan mahdollisimman suuri neliöpohjainen suora pyramidi. Laske pyramidin ja pallon tilavuuksien suhde. [K98, 8a]
b) R-säteisen pallon ympäri asetetaan mahdollisimman pieni neliöpohjainen suora pyramidi siten, että pallo sivuaa pyramidin pohjaa ja sivutahkoja. Laske pallon tilavuuden suhde pyramidin tilavuuteen. [K02, 10]

798 Ympyränmuotoisen suon halkaisija AB on 1 km. Suunnistaja haluaa päästä mahdollisimman lyhyessä ajassa kohdasta A kohtaan B. Miten hänen on valittava reittinsä, jos hän juoksee kovalla maalla 10 km/h ja suolla 5 km/h? [S00, 9]

799 Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on 6,6 cm ja sivujana 11,0 cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa.Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri. [K00, 11]

8 Integraalilaskenta

8.1 Integraalifunktio

801 Määritä funktion f kaikki integraalifunktiot.

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ b) $f(x) = x(x^2 - 2)^3$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$, $x > 3$

802 Määritä funktion $f(x) = x^2 - 3x + 1$ se integraalifunktio F, jolle $F(2) = 0$.

803 Laske $f(2)$, kun $f(3) = 4$ ja $f'(x) = (3x - 1)^2$. [s89, 2a]

804 Määritä funktion f se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(2, -1)$ kautta.

a) $f(x) = xe^{4-x^2}$ b) $f(x) = x^2\sqrt{x^3 - 4}$, $x \geq 2$

805 Millä parametrin a arvoilla funktion $f(x) = 2x + a$ integraalifunktio kulkee pisteiden $(1, 3)$ ja $(-4, 8)$ kautta?

806 Funktion f integraalifunktion kuvaaja kulkee origon kautta. Määritä integraalifunktio, kun a) $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$ b) $f(x) = \sin x \cos x$

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

807 Laske.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\,dx,\ x > 0$ b) $\int \frac{10x+2}{\sqrt{5x^2+2x}}\,dx,\ x > 0$ c) $\int \frac{x^2-4}{x+2}\,dx,\ x < -2$

808 Määritä funktion f kaikki integraalifunktiot, kun

a) $f(x) = x e^{4x^2-3}$ b) $f(x) = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2}$ c) $f(x) = \frac{3x+2}{9x^2-4},\ x < -\frac{2}{3}$.

809 Laske.

a) $\int \frac{1}{\cos^2 x} e^{\tan x}\,dx,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx,\ -1 < x < 1$

c) $\int \frac{e^{4x+2} + e^{6x}}{e^x}\,dx$

810 Onko funktio f: $f(x) = e^x \sin x$ funktion g: $g(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ integraalifunktio? [S91, 2]

811 Määritä se funktion f: $f(x) = x^2 + x - 2$ integraalifunktio, jolla on paikallinen minimiarvo -4. [S87, 1a]

812 Olkoon F funktion $f(x) = |4x + 2|$ se integraalifunktio, jolle $F(2) = 14$. Määritä funktio F ja laske $F(-2)$.

8.2 Määrätty integraali

MÄÄRÄTTY INTEGRAALI

813 Laske. a) $\int_{-2}^{3} (5 - x^2)\,dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x\,dx$ c) $\int_{0}^{3} |2x - 1|\,dx$

814 Laske integraali. a) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ [S06, 2b] b) $\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x \cos x^2\,dx$ c) $\int_{-4}^{10} |x - 3|\,dx$

815 Laske. a) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(1-x)^2}$ [K87, 3] b) $\int_{0}^{1} x e^{x^2} dx$ [K91, 2]

816 Määritä vakio a siten, että $2\int_a^{2a}(4-3x)\,dx = -20$.

817 Millä a:n arvoilla integraali $\int_0^a (3x^2 - 6x + 2)\,dx$ saa arvon nolla? [K68, 1]

818 a) Määritä vakio A siten,että $\int_0^1 (e^x + Ax)\,dx = 0$. [S91, 3a]

b) Millä A:n ja B:n arvoilla $\int_0^1 (Ax + B)\,dx = B + 1$? [k87, 3a]

819 Laske. a) $\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$ [K89, 2a] b) $\int_1^e \frac{x+2}{x}dx$ [K90, 2]

820 Määritä $\lim\limits_{a\to -2} \frac{1}{a+2}\int_1^a (2x+1)\,dx$.

821 Määritä funktion $F(x) = \int_1^{2x} (2t-4)\,dt$ ääriarvokohdat.

822 Laske integraali $I(x) = \int_0^x |\sin t|\,dt$, kun a) $0 \le x \le \pi$ b) $\pi < x \le 2\pi$.
Piirrä käyrä $y = I(x)$ välillä $0 \le x \le 2\pi$. [S75, 9]

823 Funktio f on määritelty välillä $0 \le x \le 2$ seuraavasti: $f(x) = \int_{-1}^0 |x+t|\,dt$.
Määritä funktion suurin ja pienin arvo välillä [0, 2].

824 Esitä funktio f: $f(x) = \int_0^{3x} (|x-t| - t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, integroidussa muodossa.

825 Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, jolla on
ominaisuudet $f(0) = f(1) = 0$ ja $\int_0^1 f(x)\,dx = 100$. [K03, 10]

PINTA-ALA

826 a) Määritä käyrän $y = x^2 - 4x + 3$ ja koordinaattiakselien rajoittaman alueen pinta-ala.

b) Laske käyrän $y = (x^2 - 1)^2$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala. [s84, 5a]

827 Määritä käyrän $x = 4 - y^2$ ja y-akselin rajaaman alueen ala.

828 Käyrä $y = e^{-x}$ rajaa x-akselin ja suorien $x = -1$ ja $x = 0$ kanssa alueen. Laske syntyneen alueen ala.

829 Laske käyrän $y = x^3 - 9x$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala.

830 Laske sen alueen ala, jota rajoittavat käyrä $y = \dfrac{x-2}{x^3}$ sekä suorat $y = 0$, $x = \dfrac{1}{4}$ ja $x = \dfrac{1}{2}$.

831 Laske käyrän $y = -2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, koordinaattiakselien sekä suoran $x = 2\pi$ rajoittaman alueen ala.

832 Käyrä $y = 2^x - 2$ sekä suorat $x = 0$ ja $x = 2$ rajaavat yhdessä x-akselin kanssa äärellisen alueen. Laske kyseisen alueen ala.

833 Aluetta rajaavat y-akseli, suorat $y = 1$ ja $y = e$ sekä käyrä $y = e^{-x}$. Laske kyseisen alueen ala.

834 Laske käyrien $y = e^{2x}$ ja $y = e^{-2x}$ sekä suoran $x = 2$ rajoittaman alueen ala.

835 a) Laske suoran $x + y = 4$ ja paraabelin $x^2 + y = 4$ rajoittaman alueen ala. [k87, 5]

b) Laske käyrien $y = 4 - x^2$ ja $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$ rajoittaman kuvion ala. [K66, 3]

836 a) Laske käyrien $y = 4x^2$ ja $y = (x + 3)^2$ rajoittaman alueen pinta-ala. [k91, 6b]

b) Määritä käyrien $y = |x - 2|$ ja $y = x^2 - 4x + 2$ rajoittaman alueen pinta-ala. [s71, 11]

837 Aluetta rajaavat käyrän $x = \sqrt{|y-1|} - 1$ lisäksi suora $y = 5$ sekä koordinaattiakselit. Laske kyseisen alueen ala.

838 Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y = x^3$ ja $y = -x^2$. [s83, 5]

839 Laske käyrien $y = \sin 2x$ ja $y = \sin x$ välisen alueen pinta-ala välillä $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

840 Millä parametrin a $(0 < a < 2)$ arvoilla x-akselin ja paraabelin $y = 3x^2 - 13$ sekä suorien $x = \pm a$ rajoittaman alueen ala on 24?

841 Millä parametrin a arvoilla alueen, jota rajoittavat käyrä $y = x^2 + 1$, x-akseli sekä suorat $x = a$ ja $x = a + 1$, ala on $3\frac{1}{3}$?

842 Millä kulmakertoimen k arvoilla suoran $y = kx$ ja paraabelin $y = x^2$ rajoittaman alueen ala on 36? [s91, 6a]

843 Paraabeli $y = \frac{3\pi}{16}(1 - x^2)$ jakaa ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ rajoittaman alueen kahteen osaan. Määritä suuremman osan suhde pienempään. [k84, 6]

TILAVUUS

844 Käyrä $y = x^2 + x + 1$, $0 \le x \le 2$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

845 Käyrä $y = x^3 + 1$, $-2 \le x \le 2$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

846 Käyrä $x = 3y^2 - 4$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus, kun $-4 \le x \le 5$.

847 Jana $y = 2x + 1$, $1 \le x \le 5$, pyörähtää y-akselin ympäri. Laske muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

848 Paraabelin $y = 4 - x^2$ ja x-akselin rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus. [S65, 10]

849 Käyrien $y = x^2 - 5$ ja $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

850 Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy paraabelien $y = x^2$ ja $y^2 = x$ rajoittaman alueen pyörähtäessä x-akselin ympäri. [k66, 11]

851 Käyrien $y = e^x$ ja $y = xe^x$ sekä suoran $x = 0$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määrää syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus. (Opastus: käytä osittaisintegrointia.)

852 Käyrien $y = x^3$ ja $y = x^2$ rajoittama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Määrää syntyneen kappaleen tilavuus.

853 Käyrän $y = x^2 - 1$, $x \geq 0$, suorien $y = -1$, $y = 3$ ja a) $x = 3$ b) $x = 2$ rajaama alue pyörähtää suoran $x = 3$ ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

854 Käyrät $y = -2x^2 + 2$ ja $y = \sqrt{1 - x^2}$ rajoittavat useampiosaisen tasokuvion. Näistä osista se, joka jää ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ ulkopuolelle, pyörähtää x-akselin ympäri. Määritä syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuuden tarkka arvo ja likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella. [K89, 7b]

855 Laske syntyvän kappaleen tilavuus, kun käyrä $y = \sqrt{1 - x^2}$ pyörähtää a) x-akselin b) y-akselin ympäri.

856 Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = \frac{1}{2}x^2 - |x^2 - x|$ x-akselin yläpuolella olevan osan pyörähtäessä x-akselin ympäri.

857 Määritä vakio $a > 0$ siten, että käyrän $y = \sqrt{x + a}$ ja koordinaattiakselien rajaaman alueen pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyneen kappaleen tilavuus on 2π.

858 Lasista (tiheys 3000 kg/m^3) valmistettu astia on muodoltaan pyörähdyskappale, joka syntyy suorien $x = -3$ ja $x = 3$, paraabelin $y = x^2 + 2$ sekä x-akselin rajoittaman alueen pyörähtäessä y-akselin ympäri. Astian korkeus on 10,0 cm ja pohjan halkaisija on 6,0 cm.

a) Laske astian vetoisuus integroimalla.
b) Laske astiaan kuuluvan materiaalin tilavuus.
c) Laske astian massa.
d) Vettä täynnä olevasta astiasta kaadetaan puolet vedestä pois. Mikä on jäljelle jääneen veden korkeus?

Luvun 8 sekalaisia tehtäviä

859 Laske. a) $\int(x^2 + \sin 2x)\,dx$ [K06,2b] b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ [S79, 7a]

860 a) Määritä a siten, että $\int_a^{a+1} (2x + 3)\,dx = \frac{1}{2}$. [K04, 2]

b) Määritä luku a siten, että $\int_{-a}^{a} (x^2 + ax)\,dx = \frac{1}{12}$. [K76, 1]

861 a) Funktio F on määritelty arvoilla $x < 0$ ja toteuttaa ehdot $F'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ja $F(-1) = 1$. Määritä F. [S86, 3a]

b) Määrää se funktion $4 \sin x \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$ integraalifunktio, joka on arvoilla $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ jatkuva ja joka x:n arvolla 0 saa arvon 2. [K67, 3]

862 Onko funktio $f(x) = x + \sin x \cos x$ funktion $g(x) = 2\cos^2 x$ integraalifunktio? [K96, 2a]

863 Määritä käyrän $x = y^2(y - 1)$ ja y-akselin rajoittaman alueen ala.

864 Laske paraabelin $x = 2y^2 + y$ ja suoran $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ rajoittaman alueen ala.

865 Laske. a) $\int(\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x)\cos x\,dx$ b) $\int \frac{4^{6x} - 4}{4^{3x} + 2}\,dx$

866 Määritä funktion $f(x) = |x^2 + 2x|$ integraalifunktio $F(x)$.

867 Laske niiden osien pinta-alojen suhde, joihin paraabeli $y^2 = 2x$ jakaa ympyrän $x^2 + y^2 = 8$ rajoittaman alueen. [s66, 11]

868 Laske paraabelin $y = x^2$ sekä tämän pisteestä (1, 0) piirrettyjen tangenttien rajoittaman alueen ala. [s88, 9]

869 Laske. a) $\int \tan^2 x \sin x \, dx$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$, $x > -1$, $x \neq 0$

870 Määritä yhtälön $\int_{-3}^{x} (t^2 - 2t - 6)\, dt = 0$ juuret.

871 Suora $y = ax$ leikkaa paraabelin $y = x^2$. Olkoon S näin syntyvän paraabelinsegmentin ala ja T sen kolmion ala, jota rajoittavat mainittu suora sekä tämän ja paraabelin leikkauspisteisiin piirretyt tangentit. Määrää suhde $S{:}T$. [k68, 11]

872 Laske paraabelin $y = a^3x^2 - a$ $(a > 0)$ ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala. [k88, 8]

873 Laske $\int_{-\frac{\omega}{k}}^{-\frac{\omega}{k}+\frac{\pi}{k}} k \sin(kx + \omega)\, dx$, kun $k \neq 0$. Miten lausekkeen arvo riippuu vakiosta k? [K94, 6a]

874 Määritä vakio $a > 0$ siten, että $\int_{a}^{2a} \frac{\ln x}{x}\, dx = 0$. [S74, 8]

875 Millä parametrin $a > 0$ arvoilla paraabelin $y = -x^2 + ax$ sekä suorien $x = 0$, $x = a$ ja $y = 0$ rajoittaman yksiosaisen alueen pinta-ala on 36?

876 Määritä $\lim_{a \to 1} \frac{1}{a-1} \int_{1}^{a} (3x^2 - 2x - 4)\, dx$.

877 Käyrän $y^2 = (2 + x)(2 - x)(1 - x)$ muodostama umpinainen silmukka pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuneen pyörähdyskappaleen tilavuus. [S91, 5b]

878 Reaalilukujen joukossa määritellyn funktion f kuvaajan mielivaltaiseen pisteeseen (x, y) piirretyn tangentin kulmakerroin on $k(x) = 1 - e^{-2x}$. Funktion f pienin arvo on 2. Määritä f. [K00, 7]

879 Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy ympyrän $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ ja suoran $y = -x - 1$ muodostaman pienemmän segmentin pyörähtäessä x-akselin ympäri. [S04, 7]

880 Laske integraalien $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ ja $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$ summa ja erotus sekä niiden avulla I_1 ja I_2. [S89, 6a]

881 Määritä vakiot A ja B siten, että funktio F: $F(x) = A \ln|x + 2| + B \ln|x - 3|$ on funktion f: $f(x) = \dfrac{4x + 2}{x^2 - x - 6}$ integraalifunktio välillä $]-2, 3[$.

882 Anna esimerkki sellaisesta jatkuvasta funktiosta f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, että f saa arvon 6 jossakin pisteessä ja $\int_0^1 f(x) \, dx = 0$. Saako nämä ehdot täyttävä funktio aina arvon 0 jossakin pisteessä? [K05, 8]

883 Käyrän $y = 2 \ln(x + 1)$, $0 \le x \le e - 1$, pyörähtäessä y-akselin ympäri syntyy suppilomainen astia. Laske sen tilavuus. Ilmoita tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. [K06, 9]

884 Määrää se funktion $f(x) = x + |x|$ integraalifunktio F, joka x:n arvolla 1 saa arvon 2. Todenna, että $F'(0) = f(0)$. Laske $F(-2)$. [K68, 9]

885 Osoita, että kaikilla x:n positiivisilla arvoilla funktion f: $f(x) = \int_0^1 \dfrac{dt}{x + t}$ derivaatta on $-\int_0^1 \dfrac{dt}{(x + t)^2}$. [S88, 9]

886 Piirrä funktion f: $f(x) = \dfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} \dfrac{dt}{\sqrt{1 + x^2 - 2xt}}$ kuvaaja. [S79, 10]

887 Muodosta funktio f: $]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y = 2$ ja jonka derivaatta on $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. [K04, 10]

888 Määritä funktion f: $f(x) = \int_0^x (|t| - |t - 1|) \, dt$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 3]$. [K84, 10]

889 Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^3 + 1$, x-akselin sekä suorien $x = 3$ ja $y = 9$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri. [S01, 12]

890 Ympyränkaaren päätepisteet ovat $(-2, 0)$ ja $(2, 0)$, ja kaari kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta. Kun kaari pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyspinta. Muodosta integraali, joka esittää pinnan rajaaman kappaleen tilavuutta. Integraalia ei tarvitse laskea. [S06, 13]

891 Määritä $f'(7)$, kun $f(x) = \int_x^{10} \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

892 Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti: $f(x) = \int_x^{3x} \sqrt{t^2 + 1}\, dt$. Määritä derivaatta $f'(x)$ ja tutki funktion f ääriarvoja. [S00, 13]

893 Jatkuvan funktion $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *keskiarvo* välillä $[0, x]$ $(x > 0)$ määritellään seuraavasti:

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$$

Määritä keskiarvofunktion derivaatta $G'(x)$ ja lausu se funktion arvojen $f(x)$ ja $G(x)$ avulla. Osoita, että $G(x) \leq f(x)$, jos f on kasvava. Osoita edelleen, että tällöin myös G on kasvava. [S03, 14]

894 Käyrä $y = f(x)$, $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$, pyörähtää x-akselin ympäri ja muodostaa kappaleen, jonka tilavuus jokaisella välillä $[0, x]$, $0 < x \leq 1$, on x^5. Määritä $f(x)$. Piirrä kuvio. [K97, 10a]

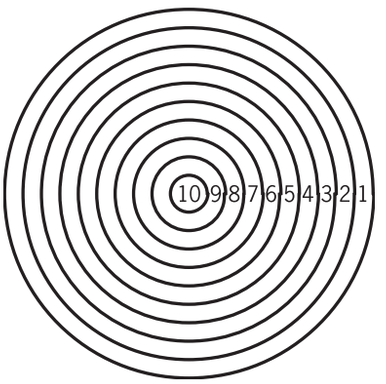
895 Suoran tien viereen rakennetaan täyttömaasta meluvalli, jonka poikkileikkaus on pystyssä olevan paraabelin muotoinen. Vallin korkeus on 3 m, leveys maan pinna tasolla 6 m ja pituus 55 m. Kuinka monta kuutiometriä täyttömaata valliin tarvitaan? [K93, 6b]

896 Euroopan unionin tarkastaja mallintaa satelliittikuvassa näkyvän, trombin tuhoaman metsän alueeksi, joka jää käyrien $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ väliin, kun $x \in [0, \pi]$. Mikä on tuhoalueen tarkka pinta-ala mallin mukaan? Pituuden mittayksikkönä on kilometri. Oletetaan, että trombin tuhoista maksetaan korvausta 11 500 mk/ha. Kuinka paljon metsän omistaja saa korvausta? [K98, 7]

897 Tikkataulun säde on 20 cm, ja taulu jakautuu kymmeneen samankeskiseen yhtä leveään renkaaseen, jotka on numeroitu ulkoa sisäänpäin 1:stä 10:een. Gabrielin heittämät tikat osuvat tauluun siten, että niiden etäisyys r taulun keskipisteestä noudattaa todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{3}{16000}(400 - r^2), & \text{kun } 0 \le r \le 20 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Tässä r on ilmaistu senttimetreinä.



a) Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämä tikka osuu 9:ään tai 10:een.
b) Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämistä viidestä tikasta ainakin kolme osuu 9:ään tai 10:een. [K05, 9]

898 Rasian pohja on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 7 cm ja 15 cm. Rasian laidat kallistuvat ulospäin kaikki samassa kaltevuudessa siten, että laitojen yläreunat muodostavat suorakulmion, jonka sivujen pituudet ovat 11 cm ja 19 cm. Rasian korkeus (pystysuoraan mitattuna) on 8 cm. Laske pinta-ala rasian vaakasuoralle poikkileikkaukselle korkeudella z ($0 \le z \le 8$, z senttimetreinä). Laske myös rasian tilavuus. [K05, 11]

899 Yhtälön $x^2 + px + q = 0$ kertoimiksi p ja q valitaan umpimähkään ja toisistaan riippumatta reaaliluvut väleiltä $|p| \le 2$, $|q| \le 2$. Mikä on todennäköisyys sille, että yhtälön juuret ovat reaaliset? [K71, 12]

9 Lukujonot ja summat

9.1 Peruskäsitteitä

901 Olkoon (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, lukujono, jolle $a_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$.

a) Luettele lukujonon (a_n) 5 ensimmäistä termiä.

b) Osoita, että lukujono (a_n) on aidosti kasvava.

902 Luettele lukujonon $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} - 4,\ n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$ viisi ensimmäistä termiä.

903 Osoita, että lukujono a) $(16 - 5n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) $\left(\dfrac{n^2}{n!}\right)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ on aidosti vähenevä.

904 Olkoon $n = 1, 2, 3, \ldots$ Osoita, että lukujono

a) $\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)$ on aidosti kasvava

b) $\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)$ on aidosti vähenevä.

905 Määritä lukujonon $a_n = 10n^3 - 81n^2 - 192n + 4$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, pienin termi.

906 Osoita, että lukujono $\left(\dfrac{n^2}{2n+3}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, on aidosti kasvava.

907 Osoita, että lukujonon $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_n = 3a_{n-1} + 4,\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$ yleinen termi on $a_n = 3^n - 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

908 Määritä lukujonon $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n},\ n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$ yleinen termi.

909 Osoita, että lauseke $\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$, missä a_k:t ovat annettuja reaalilukuja, saa pienimmän arvonsa, kun $x = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Lausu tämä pienin arvo lukujen a_k avulla mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa. [S03, 11]

910 Määritä lukujonon $a_n = \dfrac{9n^2 + 45n}{n^2 + 28}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, suurin ja pienin termi.

911 Olkoon α ja β yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret $(\alpha > \beta)$ ja $c_n = \alpha^n - \beta^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Osoita, että $c_n + c_{n+1} = c_{n+2}$, ja laske c_3. [s76, 9]

9.2 Aritmeettinen lukujono ja summa

912 Määritä aritmeettisen lukujonon (23, 17, …) 35. termi ja laske lukujonon 35 ensimmäisen termin summa.

913 Osoita, että lukujono (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, jossa $a_n = 3n - 10$, on aritmeettinen. Laske lukujonon 30 ensimmäisen termin summa.

914 Kuinka moni aritmeettisen lukujonon (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, termeistä on positiivinen, kun tiedetään, että jonon 1. termi on 57 ja 11. termi on 42?

915 Aritmeettisen lukujonon 15. termi on –213 ja 27. termi on –208.
a) Määritä jonon 1. termi.
b) Kuinka moni jonon termeistä on negatiivinen?

916 Aritmeettisessa lukujonossa on $a_2 = 8$ ja $d = 4$. Mikä on
a) a_1 b) a_{97} c) a_n d) a_{n-6}?

917 Onko luku aritmeettisen lukujonon $\left(-5, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$ jäsen? a) 242 b) 301

918 P on ensimmäisen asteen polynomi. Osoita, että lukujonon $P(1)$, $P(2)$, …, $P(n)$, … kahden peräkkäisen luvun erotus on vakio. [s77, 2]

919 Suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet muodostavat aritmeettisen jonon. Laske kolmion pienin kulma kymmenesosa-asteen tarkkuudella.

920 Nuoripari ottaa 100 000 euron asuntolainan. Laina-aika on 20 vuotta ja lainan korko 5 %. Laina on tasalyhenteinen, vakiolyhennys ja korot maksetaan puolivuosittain.
a) Kuinka suuri on kertalyhennys?
b) Kuinka suuri on ensimmäinen maksuerä?
c) Kuinka suuri on viimeinen maksuerä?
d) Kuinka paljon nuoripari maksaa korkoja koko laina-aikana?

921 Joukko koostuu parillisesta määrästä peräkkäisiä luonnollisia lukuja. Näytä, että joukon lukujen keskiarvo ei ole luonnollinen luku. [K97, 8a]

9.3 Geometrinen lukujono ja summa

922 Määritä geometrisen lukujonon $(-6, 18, \ldots)$ 11. termi ja laske 10 ensimmäisen termin summa.

923 Mikä on geometrisen lukujonon termi a_9, jos a) $a_1 = 48$ ja $q = \frac{1}{2}$ b) $a_{14} = 81$ ja $q = -\frac{1}{3}$?

924 Geometrisessa jonossa on $a_4 = 10$ ja $a_6 = 40$. Määritä a) a_5 b) a_1 c) a_{20}.

925 Iivari osti uudet housut, joiden lahjepituus on 34 tuumaa. Housujen luvataan kutistuvan 2 % jokaisessa pesussa.
a) Kuinka pitkät housut ovat 10 pesukerran jälkeen?
b) Kuinka pitkät housut ovat 50 pesukerran jälkeen?
c) Kuinka monta kertaa Iivari voi pestä housut ennen kuin ne tulevat liian lyhyiksi? Iivarin sopiva lahjepituus on 29 tuumaa.

926 Geometrisen lukujonon 5. termi on $a_5 = \frac{2}{5}$ ja 12. termi on $a_{12} = \frac{42}{15}$. Määritä a) suhdeluku q b) jonon yleinen termi.

927 Osoita, että lukujono (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, jossa $a_n = \frac{7^n}{3^{n-2}}$, on geometrinen.

928 Geometrisen lukujonon 1. termi on 92 ja suhdeluku $q = \frac{5}{7}$. Kuinka moni jonon termeistä on ykköstä suurempi?

929 Auton ostohinta on 30 000 €. Auton arvon arvioidaan alenevan 20 % vuodessa.
a) Mikä on auton arvo 5 vuoden kuluttua ostohetkestä?
b) Kuinka monen vuoden kuluttua arvo on pudonnut alle 3000 euron?

SEKALAISIA TEHTÄVIÄ

930 Lukujonossa $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ on termit $a_1 = 10$ ja $a_{20} = 20$. Määritä a_{39}, kun lukujono on 1° aritmeettinen 2° geometrinen.

931 *A* sijoittaa joka vuoden alussa 6 % säästötilille 20 000 mk hankkiakseen asunnon, jonka hinta säästämisen alussa on 90 000 markkaa. Asunnon hinta nousee 12 % vuodessa. Kuinka monen sijoituskerran jälkeen säästöt riittävät asunnon ostamiseen? [S85, 7a]

932 Liisa sijoittaa joka kuukauden alussa pankkitilille 150 euroa. Tilin vuosikorko on 3,6 % ja korko lisätään pääomaan kuukausittain.
a) Kuinka paljon tilillä on rahaa 3 vuoden kuluttua?
b) Kuinka kauan Liisan on säästettävä, jotta hänellä on koossa 10 000 euroa?

933 Isä tallettaa poikansa tilille joka kuukauden alussa 200 € vuodenvaihteessa tapahtuneesta syntymästä alkaen. Tilille maksetaan 1,5 % vuotuista korkoa, joka liitetään pääomaan aina vuoden lopussa.
a) Kuinka paljon rahaa tilillä on, kun poika täyttää 18 vuotta?
b) Kuinka kauan isän olisi talletettava, jotta tilillä olisi rahaa kaksiota varten, kun kaksion hinnaksi oletetaan 135 000 €? [S03, 12]

934 Pallon sisään asetetaan kuutio, jonka kärjet ovat pallon pinnalla. Kuution sisään asetetaan pallo, joka sivuaa jokaista kuution sivutahkoa. Tämän sisään asetetaan jälleen kuutio jne. Osoita, että pallojen a) säteet b) pinta-alat c) tilavuudet kukin erikseen muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonojen suhdeluvut. [K01, 11]

935 Osoita, että $\frac{3^n - 1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{3^n - 1}{3^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. [s78, 8]

936 Lukujonossa (1, 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, 31, …) parillisessa paikassa oleva termi on kaksinkertainen verrattuna sitä edeltävään termiin ja parittomassa paikassa (ensimmäistä termiä lukuun ottamatta) on yhden suurempi kuin sitä edeltävä termi. Mikä on a) jonon miljoonas termi b) miljoonan ensimmäisen termin summa?

937 Määritä funktion $e^{-x} \sin x$ $(x \geq 0)$ ääriarvot. Osoita, että funktion peräkkäiset maksimiarvot muodostavat geometrisen jonon. [K76,8]

938 Laske funktion f, $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$, derivaatta. Osoita, että käyrän $y = e^{-x} \sin x$ ja x-akselin alueessa $x \geq 0$ rajoittamien alueiden $A_0, A_1, A_2, \ldots$ pinta-alat muodostavat geometrisen jonon.

YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA 16.3.2007 MATEMATIIKAN KOE PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä ($\star$) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $7x^2 - 6x = 0$.

b) Ratkaise epäyhtälö $|3x - 2| < 4$.

c) Sievennä lauseke $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ $\quad (a > 0)$.

2. **a)** Laske integraali $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + 2x^2)\,dx$.

b) Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ derivaatta $f'(1)$.

c) Sievennä lauseke $e^{2\ln x} - 2x^2$.

3. **a)** Merivettä, jossa on 4,0 painoprosenttia suolaa, haihdutetaan altaassa, kunnes sen massa on vähentynyt 28 %. Mikä on suolapitoisuus haihduttamisen jälkeen? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

b) Mikä on vuotuinen korkoprosentti, jos tilille talletettu rahamäärä kasvaa korkoa korolle 1,5-kertaiseksi 10 vuodessa? Lähdeveroa ei oteta huomioon. Anna vastaus prosentin sadasosan tarkkuudella.

4. Määritä jokin pisteiden $A = (2, 3, 6)$ ja $B = (4, -7, -3)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori ja muodosta suoran parametriesitys. Määritä suoran ja xy-tason leikkauspiste.

5. Laske suorien $x + y = 1$, $x + y = 6$, $x - 3y = 1$ ja $x - 3y = -4$ väliin jäävän alueen pinta-ala.

6. Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x^2 + 7x + 2}{x - 3} > 1$.

7. Suoran ympyräpohjaisen kartion sisään asetetaan tilavuudeltaan suurin mahdollinen suora ympyräpohjainen lieriö, jonka akseli on kartion akselilla, pohjista toinen on kartion pohjalla ja toisen kehä koskettaa kartion vaippaa. Kartion korkeus on 6 pituusyksikköä ja pohjan säde on r. Määritä lieriön korkeus.

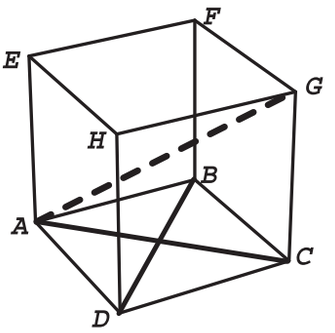
8. Satunnaismuuttuja X saa arvoja väliltä $[0, 1]$, ja sen tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{2}.$$

Määritä vakio a. Millä todennäköisyydellä X on välillä $[0, \frac{1}{2}]$?

KÄÄNNÄ!

9. Laske kuution avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän AC suuntien välinen kulma 0,1 asteen tarkkuudella. Laske edelleen avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän BD suuntien välinen kulma.



10. Jonon (a_n) termit ovat muotoa $a_n = \dfrac{2n-2}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Osoita, että kaikille termeille pätee $a_n < 2$ ja $a_{n+1} > a_n$. Määritä raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n$.

11. Olkoon f funktio, jolla on seuraavat ominaisuudet: $f(x+y) = f(x)f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y, $f(0) = 1$ ja f on derivoituva muuttujan arvolla 0. Osoita erotusosamäärää käyttäen, että f on derivoituva kaikkialla ja että $f'(x) = f'(0)f(x)$. Anna esimerkki funktiosta, joka toteuttaa nämä ehdot.

12. Laske integraalin $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ tarkka arvo. Laske sille myös viisidesimaalinen likiarvo puolisuunnikassäännöllä käyttämällä neljää jakoväliä. Mikä on likiarvon suhteellinen virhe prosentteina?

13. Olkoon n alkuluku sekä x ja y kokonaislukuja. Osoita, että

$$x^n + y^n \equiv (x+y)^n \pmod{n}.$$

⋆14. Olkoon $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i$ välillä $-1 < x < 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.
a) Perustele, miksi raja-arvo $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$ on olemassa välillä $-1 < x < 1$. Määritä $f(x)$.
b) Johda ja sievennä erotuksen $P_n(x) - f(x)$ itseisarvon lauseke.
c) Kuinka suuri on polynomin $P_n(x)$ asteluvun n vähintään oltava, jotta

$$|P_n(-0{,}5) - f(-0{,}5)| \le 0{,}01\,?$$

⋆15. **a)** Olkoon $a > 0$, $b > 0$ ja $0 < p < 2$. Näytä, että $pab < a^2 + b^2$. (3 pistettä)
b) Osoita, että jos suorakulmaisella kolmiolla ja neliöllä on sama pinta-ala, niin kolmion piiri on pidempi kuin neliön piiri. (6 pistettä)

Vastaukset

1 Luvut ja laskutoimitukset

101 a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{5}$

102 a) 1 b) $-1\frac{1}{3}$

103 a) 2 b) $\frac{5}{256}$ c) 9

104 a) a^2 b) $\frac{3x^3}{y^3}$

105 a) 1 b) -5

106 a) $-\frac{1}{10}$ b) $(-1)^n a^{3n}$

107 a) -1 b) $a^2 + b^2$

108 $\frac{a-b}{a+b}$

109 Ei ole.

111 2^{4+3p^2}

112 a) $\frac{781}{333} = 2\frac{115}{333}$

b) Ei voida esittää murtolukumuodossa.

113 $\frac{a^2+4}{4a}$, $a > 0$

115 Junien keskinopeudet: Tre–Hki 100,2 km/h, Hki–Tre 90,5 km/h. Kohtaamisetäisyys on 47,5 km, ja kohtaamisaika on klo 9.30.

116 Vähintään 9 miestä. Aikaa kuluisi 7 h 49 min.

117 kyllä

118 55,8 tonnia.

119 684 d

120 4,2 %

121 26,5 ℓ

122 43 ℓ

123 Hinta nousee 0,5 %.

124 8,7 %

125 30 vuotta

126 a) 118,85 € b) 4,1 %

127 6,1

128 1,6 ℓ

129 1,5 %.

130 13,6 %.

131 Veden ja suolaliuoksen sekoitussuhteen pitää olla 2:3.

132 59 %

133 30 %

134 49 %

135 73 %

136 6,7 %

137 71 %

138 arvioitu osuus 33 %, lopullinen osuus 32 %

139 16 %

140 hopeaa 76,2 %, kuparia 23,8 %

141 107 %.

142 Päärynämehun ja omenamehun sekoitussuhde on 4:3.

143 260

144 $\begin{cases} -2x^2 - 10x + 5, & \text{kun } x < -5 \\ 2x^2 + 10x + 5, & \text{kun } x \geq -5 \end{cases}$

145 $\begin{cases} 4x^2 - 9x + 1, & \text{kun } x \leq 2 \\ -4x^2 + 7x + 1, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$

146 a) -8 b) $-4a^3b^3$

147 a) 4π b) $\frac{|x|}{2|y|}$, $y \neq 0$

148 $\begin{cases} 12x - 54, & \text{kun } x < -3 \\ 18x - 36, & \text{kun } -3 \leq x \leq 3 \\ -12x + 54, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$

149 $2x$

150 $-ax$

151 a) 4 b) -24

152 a) $3\sqrt{3} - 5$ b) $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$

153 a) -2 b) $2\sqrt{2}$ c) $-\frac{3}{2}$

154 a) 2 b) 3 c) $\sqrt[9]{2}$

155 a) $9 + 3\sqrt{3}$ b) -3

156 $1\frac{1}{11}$

157 a) $a^2 + 1$ b) $(1 - 3x)\sqrt{1 - 3x}$, $x < \frac{1}{3}$

158 a) $\sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$ b) x, $x > 0$

159 1

160 $2\frac{1}{2}$

161 $5\sqrt{x}$

162 $\sqrt{2} - a$

163 a) $-2x^2$ b) $y\sqrt[4]{y}$

164 a) x b) $a - a^2$

166 a) Väite on tosi. b) Väite on epätosi.

168 $\sqrt{a^3} + b\sqrt{a}$

169 a) $\dfrac{3-x}{x}$, $x \neq -3$, $x \neq 0$

b) $2x - 1$, $x \neq 0$, $x \neq \dfrac{1}{2}$

170 a) $\dfrac{1-4x}{2x-1}$, $x \neq -\dfrac{1}{3}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$

b) $-3x^2 + 2$, $x \neq \dfrac{4}{5}$

171 a) $\dfrac{3}{x-1}$, $x \neq \pm 1$

b) -2, $x \neq 0$

172 a) $2b$, $a \neq \dfrac{b}{2}$, $a \neq b$

b) $\dfrac{a}{a+1}$, $a \neq -1$, $a \neq 0$

173 a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}$

174 a) $\dfrac{b}{a}$

175 a) $a = 3$ b) $3x - 9$, $x \neq -5$

176 a) $a = 9$, $2x - 3$, $x \neq \dfrac{3}{2}$

b) $a = 4$, $x^2 + 2$, $x \neq \dfrac{1}{2}$

177 $(2x + 1)(2x - 2)$

178 $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

179 $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

181 $P(x) = -5x(x + 1)^2(x - 2)^2$

182 $a = 1$

Opastus: $\dfrac{P(x)}{x-a} = Q(x) + \dfrac{r}{x-a}$, jossa r on jakojäännös.

183 Ei ole.

2 Yhtälöt ja epäyhtälöt

201 a) $x = 0$ b) $x = -21$ c) ei ratkaisua

202 a) $x \geq 0$ b) $x > -5$ c) $x \in \mathbb{R}$

203 $x = \dfrac{1}{3}$, joka toteuttaa myös jälkimmäisen yhtälön.

204 Kuume fahrenheitasteina on 101. Mittarit osoittavat samaa lukemaa, kun lämpötila on -40 °C.

205 Sijoitusten arvo tulee 1,2-kertaiseksi.

206 Koulumatka on 750 m.

207 Ohittaja ajoi vasemmalla kaistalla 500 m, johon kului aikaa 18 sekuntia.

208 a) $x = 1$ tai $x = 2$ b) $x = \dfrac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

209 a) $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$ b) $x < 1\dfrac{2}{3}$ tai $x > 2$

210 a) $-\dfrac{2}{3}$ b) $0 < x \leq 3$

211 $x = -0{,}9999$ tai $x = 1$

212 $-8\dfrac{2}{3}$

213 Toinen juuri pysyy samana, toinen juuri kasvaa kahdella.

214 $a < x < 0$

215 Yksi juuri (ns. kaksoisjuuri), kun $a = \pm 2$. Kaksi eri suurta juurta, kun $a < -2$ tai $a > 2$. Ei juuria, kun $-2 < a < 2$.

216 $a \geq 4$

217 $a \leq -6\dfrac{1}{3}$ tai $a \geq 5\dfrac{2}{3}$

218 a) $x = -1$ tai $x = 3$ tai $x = 5$

b) $x < -1$ tai $3 < x < 5$

219 a) 3 b) $2\dfrac{3}{8}$ c) $x = -2$ tai $x = \dfrac{1}{2}$

220 a) $x < 1$, $x \neq 0$

b) $x \leq -\sqrt{3}$ tai $\sqrt{3} \leq x \leq 5$

221 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

222 a) $x \in \mathbb{R}$ b) ei ratkaisua

223
$$\begin{cases} x < -a^2 - ab - b^2, & \text{jos } a < b \\ \text{ei ratkaisua}, & \text{jos } a = b \\ x > -a^2 - ab - b^2, & \text{jos } a > b \end{cases}$$

224 $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

225 $-2\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2}$, $a \neq -2$

226 $\dfrac{2}{3}$

227 $-2 \leq x < -1$ tai $0 < x < 1$

228 a) $x = -2$ tai $x = 1$ b) $-2 < x < 1$

229 $a = -3$ tai $a = 1$ tai $a = 1\dfrac{1}{2}$

230 a) $x = -\dfrac{1}{6}$ b) $x = -\dfrac{1}{120}$

231 $x = -\dfrac{1}{2}$ tai $x = \dfrac{1}{5}$

232 $x = -1$ tai $x = \dfrac{b}{b-a}$

233 $x = -\frac{b}{a}$, kun $a \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$, kun $a = b = 0$;
ei ratkaisua, kun $a = 0$, $b \neq 0$

234 $a = 1$

236 6,1 km

237 3,18 ha

238 esimerkiksi $x = 1$ ja $y = 1$

239 $\frac{x+1}{x+2}$, $x \neq \pm 2$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

240 a) $x = \pm\sqrt{5}$ b) $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$ c) $x = 1\frac{1}{4}$

241 a) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ b) $x = 1\frac{1}{6}$

242 a) $x < 2$ tai $x > 3$ b) $1 \leq x < 2$

243 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, $x \neq 0$

244 a) $x < -1$ tai $0 < x < 7\frac{1}{2}$

b) $-1\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$ tai $x \geq 1\frac{1}{2}$

245 a) $-3 < x \leq -1$ tai $0 < x \leq 1\frac{1}{2}$ b) $x < -2$

246 Yhtyeessä on 6 jäsentä.

248 a) $x = -3$ tai $x = 2$ b) $x = -\frac{1}{7}$ tai $x = \frac{1}{3}$

c) $x = \frac{1}{3}$

249 a) $x = -5$ tai $x = -\frac{1}{3}$ b) $x = 0$

c) $x = 1 - \sqrt{2}$

250 a) $x = -7$ tai $x = \frac{5}{7}$ b) $-7 < x < \frac{5}{7}$

251 a) $x > 1\frac{1}{2}$ b) $x < -4$ tai $x > \frac{2}{3}$

252 a) $-1\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ b) $x \leq -2\frac{1}{3}$ tai $x \geq -1$

c) $-2 < x < 4$

253 a) $-3 < x < -\frac{2}{3}$ b) $x \in \mathbb{R}$

254 $x = \frac{4}{7}$

256 $x = 0$

257 $x = -4$

258 a) $x = 1$ tai $x = 4$ b) $x = -1\frac{3}{4}$

259 $x = \frac{7}{16}$

260 $x = 6$

261 $x = -1$

262 a) $1 - x$, $x \neq 0$, $x \neq -1$

b) x, $x > 0$, $x \neq 1$ c) $x = \frac{1}{2}$

263 $x \geq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$

264 a) $x \leq -1\frac{7}{8}$ b) $x > -1\frac{7}{8}$

265 $x = 0$

266 $x \leq -2$ tai $x > 2\frac{1}{2}$

267 $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $\tan x = \frac{1}{2}$

268 a) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ b) $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$

c) $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$ d) $\sin 3\alpha = -\frac{117}{125}$

270 Yhtälöllä ei ole juuria.

272 $\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{10}$

274 a) $x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai $x = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$,
$n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$,
$n \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

275 a) $x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai

$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

276 $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

277 $x = -\frac{5\pi}{8}$ tai $x = \frac{3\pi}{8}$

278 $x = n \cdot \pi$ tai $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

279 a) $x = n \cdot \frac{2\pi}{5}$ tai $x = \pi + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$ tai $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

280 a) $x = \frac{\pi}{2} - 1 + n \cdot 4\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{6}$ tai $x = \frac{7\pi}{6}$

281 $\begin{cases} x = \frac{3}{2}a \\ y = -\frac{1}{2}a \end{cases}$

282 a) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{x}{2} - \frac{7}{6} \end{cases}$ c) ei ratkaisua

283 Punainen palikka 6 cm, vihreä palikka 8 cm ja sininen palikka 5 cm

284 Levyaseman hinta on 5200 mk.

285 Kallein lahja on enintään 500 mk ja kaksi yhtä kallista lahjaa voivat olla enintään 400 mk.

286 $\begin{cases} x = -a - 1 \\ y = 1, \end{cases}$ kun $a \neq 1$, ja $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x - 1, \end{cases}$ kun $a = 1$

287 $(m, n) = (-4, -1)$ tai $(m, n) = (2, -1)$

3 Geometria

301 a) 120° b) $4\sqrt{3}$ c) 16 d) $96\sqrt{3}$

302 14,1 cm

303 Monikulmiolla, jossa vähintään kuusi kulmaa.

304 a) $2\sqrt{13} \approx 7{,}21$
b) 33,69° ja 56,31° ja 90,00° c) 12

305 Suunnistaja oli 94 m:n päässä rastista.

306 $\sqrt{3}$

307 9 cm ja 12 cm

308 a) 25,3° b) Ala on $6\sqrt{55}$.

309 54 ja 27 kärjestä lukien.

310 300 %

311 $1\frac{3}{5}$
Opastus: Laske ensin painopisteen etäisyys kateeteista ja hyödynnä kolmion pinta-alaa.

312 i) 1,4 cm ii) 2,8 cm

313 1:2

314 20 cm^2

315 7

316 19:6

317 $\sqrt{97}$

318 a) $4\frac{1}{6}\pi$ ($\approx 13{,}1$) b) $\alpha = 30°$, $\beta = 10°$
c) $CB = 10 \cos 20°$ ($\approx 9{,}4$)

319 ympäri piirretyn neliön ala $\frac{4A}{\pi}$, sisään piirretyn neliön ala $\frac{2A}{\pi}$

320 $8\pi - 16\sqrt{2}$ ($\approx 2{,}5$)

321 114°

322 a) 90° b) 78 m

323 13 m

324 masto 73 cm ja purje 1,4 dm^2

325 a) 120 m b) 1,0 ha c) 0,14 mm

326 Lankaa kuluu 580 g.

327 10 cm^2

328 $\alpha = 70°$

329 korkeus $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, ala $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

330 a) Sivut ovat $9\sqrt{6} - 9\sqrt{2} \approx 9{,}3$ ja $18\sqrt{3} - 18 \approx 13{,}2$.
b) Ala on $81\sqrt{3} - 81 \approx 59{,}3$.

331 1224

332 $\cos^2 22{,}5° = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$

333 $a = 4$, säde on $2\frac{1}{2}$

334 6

335 5,28 km

336 tornin korkeus 76 m, katseluetäisyydet 1250 m ja 1750 m

337 a) 30° ja 150°
b) $10 - 6\sqrt{2}$ ja $10 + 6\sqrt{2}$

338 Suora jakaa kolmion alan suhteessa 4:5.

339 Ei saa rakentaa.

340 $\frac{2 + \pi}{2\pi}$

341 $\alpha = 36{,}9°$, kolmas sivu $7\frac{4}{5}$

342 90,4 m

343 Neljäs kulma on 55° ja kaksi muuta sivua 226 m ja 139 m.

344 A4-arkin sivut ovat 21,0 cm ja 29,7 cm.

345 Alojen suhde on $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}} \approx 0{,}24$.

346 $3:\sqrt{21}$

347 Sivujen pituudet metreinä ovat välillä $[6 - \sqrt{6}, 6 + \sqrt{6}]$.

350 a) 2,0 m b) 24,0 m^2 c) 3,5 m

351 54,74°

352 12 cm

353 55,2 cm

354 Levyä tarvitaan vähintään 189 cm.
Lieriön tilavuus on 170 ℓ.

355 Halkaisija on 17 cm.

356 a) 130 ℓ b) 1,6 m^2 c) 6,2 m d) 90 cm

357 19 kg

358 4

359 a) 7,0 cm b) 160 cm^2

360 korkeus 9,1 cm ja tilavuus 110 cm^3

361 0,5 mm

362 65,9 cm^2

363 Pallojen tilavuus on $\frac{2}{3}$ kotelon tilavuudesta (67 %).

364 14 000 km

365 Voidaan.

366 Pinta-ala kasvaa 28 %.

367 Pienoismallin leveys on 43,1 cm, pituus 21,5 cm ja korkeus 64,6 cm.

368 7,3 cm

369 $\alpha = 66°$ ja $r = 16{,}3$ cm

370 a) Suurin paksuus on 8,0 mm ja pienin 3,0 mm.
b) Putken massa on 13,3 kg.

371 2,08-kertainen, 30,7 % vähemmän

372 Ostaja teki hyvän kaupan.

373 trooppinen alue 40 %, napa-alueet 8 %

374 $\frac{\sqrt{3}+3}{24}\pi$

375 vähintään 2800 km

376 a) 2430 km b) 15,0 km c) 493 km

377 $\frac{4}{9}$

378 1:3 kannasta lukien

379 Kartio on 28 % pallon tilavuudesta.

380 a) 33 cm b) 74 cm
Opastus: levitä laatikko tasoon niin, että ulko- ja sisäpinnat ovat näkyvissä.

381 $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

382 a) 1:2 b) 109° ja 71° c) 2:1

383 Sidoskulma on 109,47°.

384 Kulma on 125,9°.

4 Analyyttinen geometria

401 a) $10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ b) (2, 2) c) (–1, 23)

402 a) On. b) Ei ole.

403 80

404 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ja (2, 3)

405 $3\frac{1}{2}$

406 $a = -2$ tai $a = \frac{1}{25}$

407 kulmakerroin –1 ja suuntakulma –45°

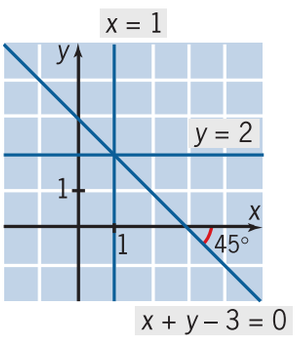
408 a) $y = 7x - 8$ $(7x - y - 8 = 0)$

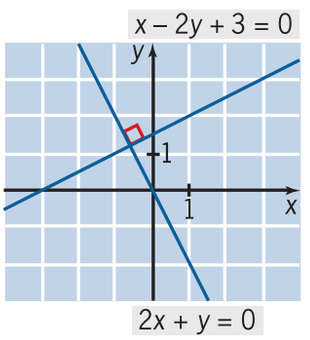
b) $5\sqrt{2} \approx 7{,}1$

c) $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 2\frac{1}{2}$

409 a) $y = 2$ b) $x = 1$
c) $x + y - 3 = 0$ $(y = -x + 3)$

d) $x - 2y + 3 = 0$ $(y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})$

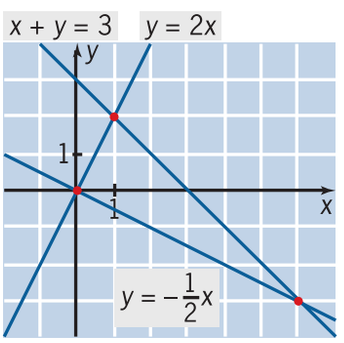




410 a) $\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j}$ $(-12\bar{i} - 8\bar{j})$ b) $\frac{2}{3}\bar{i} - \bar{j}$ $(8\bar{i} - 12\bar{j})$

411 a) (0, 0), (1, 2) ja (6, –3)

b) $\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$ ja $5\sqrt{2}$



412 a) $y = 2x - 2\sqrt{3} - 1$

$(2x - y - 2\sqrt{3} - 1 = 0)$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2 \quad (x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0)$

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

$(2x + 3y - 2\sqrt{3} + 3 = 0)$

413 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

414 $\left(0, 1\frac{1}{2}\right)$

415 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad (x + 2y - 5 = 0)$. Ala on 5.

416 $c = \pm 10$

417 (3, 3) ja (3, –2)

418 a) $a = 0$ tai $a = -1$ b) $a = 1$

419 $\sqrt{10} \approx 3{,}2$

420 (–9, 0) tai (3, 0)

421 74,2°, 60,5° ja 45,3°

422 $x + 2y - 3 = 0 \quad (y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2})$

423 Keskipiste on (1, 0) ja säde $2\sqrt{2}$.

424 $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 140 = 0$

$((x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 13^2)$

425 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

$((x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2)$

426 $a = 2$, $b = -10$, $c = 6$

427 keskipiste $\left(0, -1\frac{1}{2}\right)$, säde $2\frac{1}{2}$ ja etäisyys 4

428 $2\sqrt{5}$

429 $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3} \quad (4x - 3y + 7 = 0)$

430 $y = \frac{3}{4}x + 2$ ja $y = -\frac{4}{3}x - \frac{44}{3}$

$(3x - 4y + 8 = 0$ ja $4x + 3y + 44 = 0)$

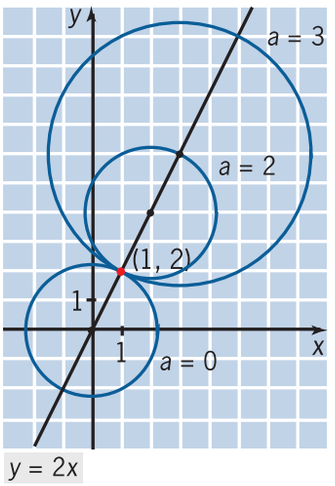
431 $a = -7$ tai $a = 43$

432 40,1°

433 $a < -\frac{1}{4}$ tai $a > 1$

Ympyröiden keskipisteet piirtävät suoran $y = -\frac{3}{2}x$, josta on poistettu jana pisteestä (–2, 3) pisteeseen $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

434 (1, 2)



435 a) huippu (2, 1), akseli $x = 2$

b) huippu (9, 3), akseli $y = 3$

436 a) $y = -2x^2$ b) $x = \frac{1}{4}y^2$

437 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 2$

438 $x = -y^2 + 12y - 32$

439 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{9}\right)$ ja $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

440 (0, 0), (4, 0), $(2 + \sqrt{3}, 1)$ ja $(2 - \sqrt{3}, 1)$

441 90°

442 $y = -6x \quad (6x + y = 0)$

443 $b = 3$ ja $c = 0$

444 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ ja (1, 1)

445 $\frac{9\sqrt{5}}{8} \approx 2{,}5$

447 $k = -2$ tai $k = 0$

448 ei

449 korkeimmillaan klo 15.15 ja matalimmillaan klo 00.00

450 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

451 $a = \frac{3}{4}$ ja ala on $\frac{4}{25}$

452 a) $x - 3y + 5 = 0 \quad (y = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3})$

b) Ei ole.

453 a) $4x + 3y - 25 = 0$ $\left(y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}\right)$

b) $8\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{4}$ ja $10\frac{5}{12}$

454 $x - 5y + 22 = 0$ $\left(y = \frac{1}{5}x + 4\frac{2}{5}\right)$

455 Ei ole.

456 120°

457 $a = -\frac{16}{9}$ ja $b = \frac{16}{3}$

458 leikkauspisteet $(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ ja $(1 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$, etäisyys $2\sqrt{6} \approx 4{,}9$

459 a) $y = 0{,}9613x + 0{,}3165$ b) 8,2°

460 7

461 $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = (2\sqrt{2})^2$
$(x^2 + y^2 - 8x - 2y + 9 = 0)$

462 $2x - y - 2 = 0$ ja $2x - y - 12 = 0$
$(y = 2x - 2$ ja $y = 2x - 12)$

463 $\frac{15\sqrt{34}}{17} \approx 5{,}1$

464 $(1, -2)$

465 $a = \frac{1}{2}$

466 $a = 0$ tai $a = 8$

467 $(x - 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ tai
$(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$
$(x^2 + y^2 - 6x - 3y + 9 = 0$ tai
$x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0)$

468 $a = \frac{1}{2}$, etäisyys $2\sqrt{2} \approx 2{,}8$

469 $a < -\frac{5}{4}$

470 $t = 0$ tai $t = -1\frac{1}{3}$

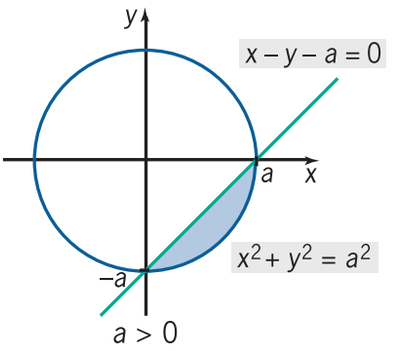
471 $a = -6\frac{5}{12}$ tai $a = 4$

472 $a = 4$ ja $m = \sqrt{3}$

473 $\left(-\frac{b}{4}, -\frac{b^2}{8} + 3\right)$

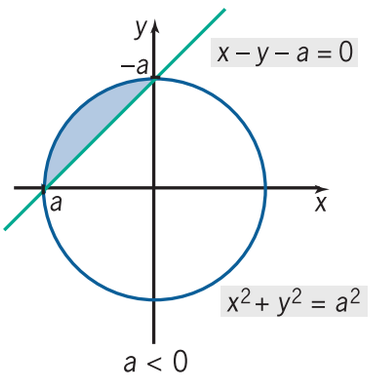
475 $\frac{\pi - 2}{3\pi + 2} \approx 0{,}100$

a)



$a > 0$

b)



$a < 0$

476 a) $-1 - \sqrt{2} < a < -1 + \sqrt{2}$ b) 2π

477 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

479 $(0, 1)$

480 ympyrän $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$
$(x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0)$ pisteistä lukuun ottamatta pisteitä $(-2, 3)$ ja $(4, -5)$

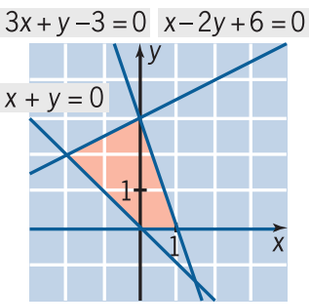
481 $y = \frac{2}{x}$ $(xy = 2)$

482 $x = \frac{1}{18}y^2 - \frac{1}{3}y$

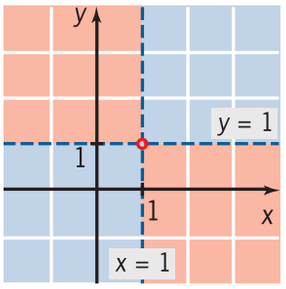
483 (x_0, y_0)

485 $2x - 3y - 13 = 0$ tai $2x - 3y + 13 = 0$
$\left(y = \frac{2}{3}x - 4\frac{1}{3}\right.$ tai $\left.y = \frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}\right)$

486 Ratkaisuna on väritetty alue. Reunasuorat kuuluvat ratkaisualueeseen. Ala on $4\frac{1}{2}$.



487 Ratkaisuna on väritetty alue. Suorat $x = 1$ ja $y = 1$ eivät kuulu ratkaisualueeseen.



5 Vektorit

501 $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$, $\overline{CA} = \bar{a} - \bar{c}$, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \bar{0}$

502 a) $\bar{a}$ b) $2\bar{c}$

503 a) 18° b) 25° c) 137°

504 $\overline{BD} = -\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{AE} = \frac{3}{5}\bar{a} + \frac{2}{5}\bar{b}$

506 $t = -\frac{1}{2}$ tai $t = 2$

507 a) $-6\sqrt{3}$ b) -20

508 $\sqrt{3}k^2$

509 a) 60° b) 120°

510 a) 0 b) 8

511 0°

512 a) 32 b) -48

513 $t = -2$

514 $\bar{w} = 3(\bar{a} + \bar{b}) - (\bar{a} - \bar{b}) + 7(\bar{a} - \bar{c})$

515 $\overline{BD} = -\bar{a} + \frac{5}{9}\bar{b}$

516 $\overline{DM} = \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{3}$

517 $\sqrt{17}$

518 90°

519 a) 120° b) 60°

521 $\overline{OP} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$

Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa aina samassa pisteessä.

522 $\overline{BC} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|^2}\bar{a} - \bar{b}$

523 Piste P on kahden korkeusjanan tai niiden jatkeiden leikkauspiste. Kolmion korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

524 a) $\overline{AB} = -6\bar{i} + 8\bar{j}$, $|\overline{AB}| = 10$ b) $\bar{i} - 3\bar{j}$

525 a) $B = (-1, 1)$ b) $C = (4, -2)$

526 $4\bar{i} - 5\bar{j} = -5\bar{i} + \bar{j} + 3(3\bar{i} - 2\bar{j})$

527 a) -10 b) 5

528 30°

529 74°

530 a) $\bar{a}^0 = \frac{4}{5}\bar{i} - \frac{3}{5}\bar{j}$ b) $\frac{3}{5}\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}$ ja $-\frac{3}{5}\bar{i} - \frac{4}{5}\bar{j}$

531 Ovat.

532 $10\sqrt{2}$

533 (3, 5) tai $\left(-4\frac{1}{5}, -4\frac{3}{5}\right)$

534 (1, 2) tai $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

535 17

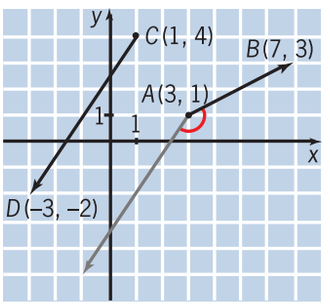
536 Eivät ole.

538 ympyrän $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ pisteet lukuun ottamatta pisteitä A ja B

539 $\overline{AD} = -\frac{3}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}$

540 Ala on 3.

541 150,3°



542 $\bar{b} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$, loppupiste (1, 7)

544 $2x - y - 5 = 0$

545 $\bar{i} + 7\bar{j} = \frac{5}{3}(2\bar{i} + 3\bar{j}) + \frac{1}{3}(-7\bar{i} + 6\bar{j})$

546 $\overline{OB} = \frac{5}{2}\bar{i} + \frac{25}{2}\bar{j}$ tai $\overline{OB} = \frac{23}{2}\bar{i} + \frac{11}{2}\bar{j}$

547 5:4

548 $\overline{PQ} = -\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{9}{2}\bar{j}$, $Q = \left(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$

549 $13\bar{i} + 12\bar{j}$ ja $-13\bar{i} - 12\bar{j}$

550 $\sqrt{41}$

551 $\bar{a} = 7\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2$

552 $\frac{1}{\sqrt{130}}(11\bar{i} + 3\bar{j})$ Myös $-\frac{1}{\sqrt{130}}(11\bar{i} + 3\bar{j})$ kelpaa.

553 ympyrän $(x + 1)^2 + y^2 = 4$

554 a) Ovat kohtisuorassa. b) $r = -1$ tai $r = 3$

555 $t = -8$

556 $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{j} + \bar{k})$

557 27°

558 39°

559 $x = -1,\ y = -3\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}$ ja tilavuus on 33.

560 a) 2 b) 1 c) 3 d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{5}$ f) $\sqrt{10}$

561 Piste P on suoralla AB, mutta piste Q ei ole.

562 3

563 a) Eivät ole. b) Ovat.

564 55°

565 ei

566 a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$ on kolmen tason leikkauspiste.

b) $\begin{cases} x = 1 + 3r \\ y = -1 - 5r \\ z = r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$ on kahden tason leikkaussuora, joka kulkee pisteen $(1, -1, 0)$ kautta ja jonka suuntavektori on $3\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$.

567 a) $2x - 2y + z + 1 = 0$ b) 3

568 $\frac{1}{3}$

569 $x = \frac{\sqrt{30}}{2}$

570 $\left(-3\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}\right)$

572 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 1$

573 $t = -\frac{1}{7}$ tai $t = 3\frac{4}{7}$ tai $t = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{4}$

574 $\bar{n} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$

6 Todennäköisyyslaskenta

601 a) 32 b) 3003

602 a) $30! \approx 2{,}65 \cdot 10^{32}$ järjestystä

b) 4060 tavalla
$4{,}42 \cdot 10^{31}$ järjestystä

c) $8{,}4 \cdot 10^{12}$ vuotta

603 15 380 937, luku on oikea, 10 416 ja 224

604 12

605 63

606 a) 2520 b) 1800

607 a) 0,833 b) 0,164 c) 0,003

608 a) 5,7 % b) 34 % c) 29 %

609 a) $\frac{25}{102} \approx 0{,}25$ b) $\frac{116}{221} \approx 0{,}52$

610 0,464

611 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$

612 a) $\frac{5}{18} \approx 0{,}28$ b) $\frac{25}{324} \approx 0{,}077$

613 $\frac{5}{12} \approx 0{,}42;\ \frac{1}{12} \approx 0{,}083$

614 a) $\frac{3}{8} = 0{,}375$ b) $\frac{46189}{262144} \approx 0{,}176$

615 a) $\frac{625}{3888} \approx 0{,}161$ b) $\frac{763}{3888} \approx 0{,}196$

616 vähintään 7

617 a) 0,84 b) vähintään 6

618 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$ c) $\frac{1}{30} \approx 0{,}033$

619 0,53

620 0,892

621 a)

x	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{243}{1024}$

b) $\mu = \frac{15}{4} = 3{,}75$ ja

$\sigma = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}97$

622 a) $a = 0$ b) $P(X < 1) = \frac{1}{4}$,

$P\left(\frac{1}{2} \le X < 2\right) = \frac{15}{16} \approx 0{,}94;\ P(X = 1) = 0$

623 a) 0,2389 b) 0,0367 c) 0

624 3,04

625 Bertta, 38 %, 14 %

626 a) 48 b) 89,6 %

627 21 700 km

628 a) 2,3263 b) 2,5758

629 $\mu = \frac{41}{6} \approx 6{,}8$ ja mediaani on 6 tai 7 tai 8

$\mu = \frac{51}{7} \approx 7{,}3$ ja mediaani 8

630 63 kg

631 a) 44 v b) 36 v c) 51 v d) 63 %
e) 40 %

632 180

633 0,1

634 32,5 %

635 0,0661; 0,0194

636 7,5

637 28 %

638 34

639 $\frac{23}{45} \approx 0{,}51$

640 $\frac{1}{6561} \approx 0{,}00015$; $\frac{16}{6561} \approx 0{,}0024$

641 $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$

642 vähintään 76

643 $\frac{5}{9} \approx 0{,}56$

644 25 %; 59 %

645 vähintään 7

646 0,41; 0,64

647 1° 1 2° $\frac{2}{9} \approx 0{,}22$

648 425 g

649 $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$

650 $\frac{7}{18} \approx 0{,}39$

651

$\lvert x-y \rvert$	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

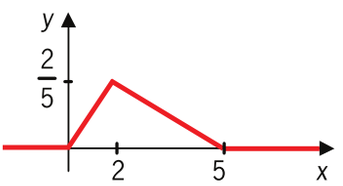
$\mu = 1\frac{17}{18} \approx 1{,}94$

652 $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$

653 212,2 cm; 211,2 cm; 213,1 cm; 40 %

654 $\frac{11}{30} \approx 0{,}37$

655 a)



b) $P(x \le 1) = \frac{1}{10}$, $P(1 < x \le 3) = \frac{19}{30}$

ja $P(x > 3) = \frac{4}{15}$

656 0,185

657 $\frac{5}{6} \approx 0{,}83$

658 $\frac{65}{238} \approx 0{,}27$

659 $\frac{1}{48} \approx 0{,}021$

660 1° $\frac{3}{5}$ 2° $\frac{1}{10}$ 3° $\frac{3}{10}$

661 vähintään 14

662 $\frac{25}{108} \approx 0{,}23$

663 0,090

664 $\frac{16}{31} \approx 0{,}52$

665 $v > 2{,}1$; 2,9 ‰; 1,3 ‰

666 $\frac{5}{18} \approx 0{,}28$

667 $\frac{1}{15}$; $\frac{6}{11}$; 0,06183; 0,55730

668 0,017; ei voida

669 $\frac{397}{10\,000}$

671 1013 g

672 5,5 %

7 Differentiaalilaskenta

701 a) 3 b) $2\frac{3}{8}$ c) $x = -2$ tai $x = \frac{1}{2}$

702 a) $x < -2$ tai $x > 1\frac{1}{2}$ b) $x = 3$

703 a) $g(x) = -x^3 - x^2$, $\mathcal{M}_g = \mathbb{R}$

b) $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, $\mathcal{M}_g = \mathbb{R}$

c) $g(x) = \frac{1-x}{x^3}$, $\mathcal{M}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

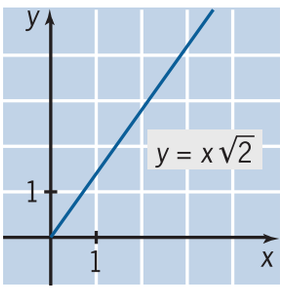
d) $g(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$, $\mathcal{M}_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

704 $-6 < a < 2$

705 $f^{-1}(y) = \frac{3y+2}{y-1}$, $y > 1$

706 $\frac{5}{6}$

707 $f(x) = x\sqrt{2}$, $x \ge 0$



708 $f^{-1}\colon [0, 16] \to [-2, 0]$,

$f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - \sqrt{x}}$

709 Ei ole.

710 a) $a = 1$ b) ei ratkaisua

711 a) -4 b) 0

712 a) -1 b) $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

713 $\dfrac{2}{3}$

714 a) $a = 2$, raja-arvo $\dfrac{2}{3}$ b) $a = 2$

c) $a = 2$, raja-arvo -6

$a = -4$, raja-arvo -12

715 a) 2,21 b) $x \approx -0{,}6823$

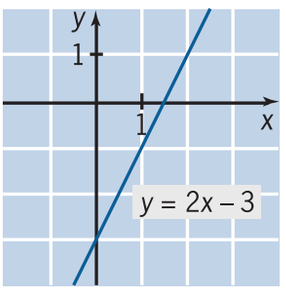
716 $a = -3$ ja $b = -1$

717 pariton, kasvava $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

pariton, ei kasvava $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$

718 a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$ b) $x = 2$

c)



719 $x = \dfrac{2}{3}$ tai $x = -2$

720 $x = 1$ tai $x = -1$

721 a) $x = \pm\sqrt{2}$

b) $x = 0$, $x = 1$, $x = \dfrac{9}{5}$

c) ei derivaatan nollakohtia

722 $-\dfrac{1}{4}$

723 $y = 12x - 16$, $(0, -16)$, ala 24

724 6,5°

725 a) $a \le -3$ tai $a \ge 3$ b) $-3 < a < 3$

c) $a = \pm 3$

726 $p(x) = (x - 2)^2(6x - 3)$

$= 6x^3 - 27x^2 + 36x - 12$

727 a) $f'(x) = 4(2x + 5)^5$

b) $f'(x) = \ln 3x + 1, \quad x > 0$

c) $f'(x) = 10e^{2x-3}$

d) $f'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}$

e) $f'(x) = 3\cos 3x - \ln x - 1, \quad x > 0$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{6}{x^3} = \dfrac{x^2\sqrt{x} - 6}{x^3}$

728 a) $2(x^2 + x + 1)e^{2x}$

b) $f'(x) = \left(\dfrac{3}{4} - x\right)e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2}$ ja

$f'(x) < 0$, kun $x > \dfrac{3}{4}$

729 $f'(3) = 1\dfrac{1}{5}$

730 $x = 0$

731 $x = 1\dfrac{1}{100}$; $x = \dfrac{9}{10}$ tai $x = 1\dfrac{1}{10}$; $x = 0$

732 $\dfrac{99}{100} < x < 1\dfrac{1}{100}$

733 a) suurin arvo 3, pienin -1

$x = \dfrac{\pi}{12} + n \cdot \pi$ tai $x = \dfrac{5\pi}{12} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \dfrac{\pi}{8} + n \cdot \dfrac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$

734 a) $\log x$ b) 1 c) 0

735 a) $x = 0$ b) $x = \pm\sqrt{2}$

c) $x = 0$ d) $x = 0$ tai $x = -2 \pm \sqrt{3}$

736 a) $\begin{cases} x = \dfrac{12}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$ b) $1 < x < \dfrac{e + 1}{e - 1}$

737 a) $a = 2$ ja $b = 1$ b) $A = \dfrac{3}{2}$, $B = -\dfrac{1}{4}$

738 a) noin 20 000 vuotta

b) 58,0 asteen kulmassa vaakatasoon nähden

740 $\dfrac{1}{4}$

741 a) kaikki arvot väliltä $]-\infty, 4]$

b) $-3 < a < 3$

742 a) tangentin yhtälö

$y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$ $(3x + 2y + 5 = 0)$

normaalin yhtälö

$y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$ $(2x - 3y - 1 = 0)$

b) $(-1, 2)$ c) $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{15}{4}\right)$

d) $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{7}{9}$ $(12x - 9y + 7 = 0)$

e) $f'(x) = 2e^{2x-2} + 3x^2$, $y = 5x - 4$, $\dfrac{4\sqrt{26}}{5}$

f) Ala on 2.

g) $f'(a)$ on funktion kuvaajan pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

$f'(1) = -\frac{5}{4}$

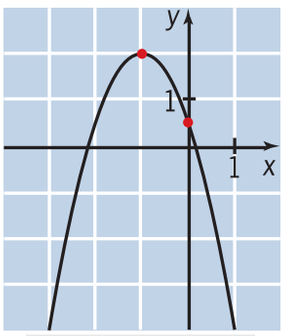
Ei voi.

h) $y = x - 3$; (3, 0)

743 a) $f(2 \ln 2) = \frac{4}{5}$; $x = -\ln 5$ b) $x = \frac{1}{2}$

c) $x = 0$ tai $x = 1$

744 a) $P(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$, $P'(x) = -3x - 3$



$y = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

745 a) 7,2 m b) 74°

746 a) 59,6 %, 2450 vuotta

b) 3 %, 100–120 h

747 a) 6,9 b) 614 mg

749 a) $f'(2) \approx 0{,}1222$ b) $a = \pm\sqrt{2}$

750 a) Eräs laskin antaa lausekkeelle arvot

$L\left(\frac{\pi}{3} + 10^{-3}\right) = 4{,}006\ 941\ 562$

$L\left(\frac{\pi}{3} + 10^{-6}\right) = 4{,}000\ 006\ 93$

$L\left(\frac{\pi}{3} + 10^{-9}\right) = 4$

$L\left(\frac{\pi}{3} + 10^{-12}\right) = 4$

$L\left(\frac{\pi}{3} + 10^{-15}\right) = \text{error}$

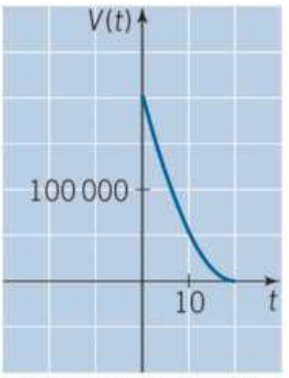
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} L(x) = 4$

Lauseke $L(x) = \frac{\tan x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$ sopii huonosti numeeriseen laskentaan ko. laskimella, koska lausekkeen arvot eivät lähesty lukua 4.

b) $g'(0) = f(0)$; voidaan

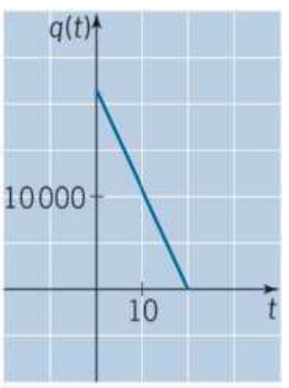
751 a) $q < \frac{1}{3}$; $\left[\frac{-1 - \sqrt{1 - 3q}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{1 - 3q}}{3}\right]$

b) $t = 20$



$V(t) = 520(20 - t)^2$

$q(t) = 20800 - 1040t$, $0 \le t \le 20$



$q(t) = 20800 - 1040t$

Tyhjennysnopeus on suurimmillaan hetkellä $t = 0$.

752 $(f^{-1})'(0) = \frac{2}{3}$

753 a) injektio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

ei injektio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$

on injektio

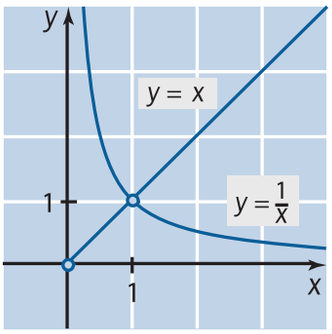
injektio mutta ei surjektio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

b) Esimerkiksi funktio $f(x) = \sqrt{|x|}$ toteuttaa annetun ehdon.

754 a) $3\frac{1}{27}$

b) Pisteet muodostavat joukon

$$\left\{(x, y)\,\middle|\, x > 0,\ x \neq 1,\ y = x \text{ tai } y = \frac{1}{x}\right\}.$$



755 b) 2

756 a) $2k$ b) $2f'(0)$

759 kasvava väleillä $]-\infty, -3]$ ja $[3, \infty[$
vähenevä välillä $[-3, 3]$

760 suurin arvo 16 ja pienin -5

761 pienin arvo -18, ei suurinta arvoa

762 maksimi $f(0) = 0$
minimit $f(-2) = -32$ ja $f(1) = -5$

763 Määrittelyalue on $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

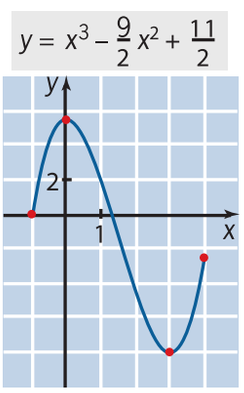
Maksimi on $\ln\frac{2}{3\sqrt{3}} = \ln\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

765 35,3°; 403 m^3

766 korkeus $\frac{2}{\sqrt{3}}$, säde $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ja suhde $\frac{1}{\sqrt{3}}$

767 suurin arvo 0, pienin -8

768 a) suurin arvo $\frac{11}{2}$, pienin -8



b) suurin arvo 12, pienin $-\frac{27}{4}$

769 a) suurin arvo 4, pienin -1

b) $a = -3\frac{1}{2}$, suurin arvo $\frac{1}{2}$

770 $f(a)$

771 minimipiste $(-1, -27)$

772 minimi $-\frac{2}{9}$, maksimi $\frac{2}{9}$

773 $f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$ $(\approx 0{,}19)$

774 Pienin arvo on 1.

775 pienin arvo 0, ei suurinta arvoa

776 $P(x) = -\frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^3 + 5x^2 - \frac{15}{4}x + 11$

777 pienin arvo $\frac{1}{3}$, suurin 1

778 suurin arvo $\frac{5}{4}$, pienin -1

783 $x + 2\sqrt{2}\,y - 3 = 0$

786 $x = 1$

787 6,20 cm; 250 cm^3

788 kulmakerroin $-\frac{4}{3}$, ala 24

789 Suora on $3x + 2y - 12 = 0$, ja ala on 12.

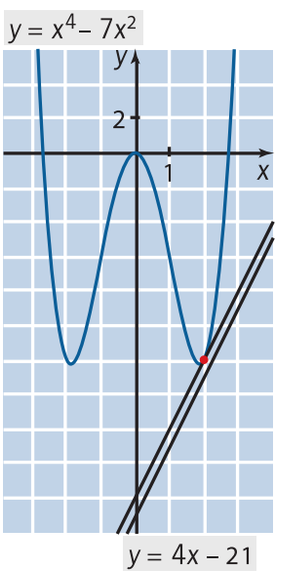
790 Tangentin yhtälö on $y = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$, ja alan suurin arvo on $\frac{2}{e}$ $(\approx 0{,}74)$.

791 8

792 80 m^2

793 109 kynärää Dracosta.

794 $(2, -12)$; $\frac{1}{\sqrt{17}} \approx 0{,}2425$



795 $\frac{4}{27}$

796 $\frac{32\pi}{3} \approx 33{,}51$

797 a) $\frac{V_{\text{pyramidi}}}{V_{\text{pallo}}} = \frac{16}{27\pi}$ $(\approx 0{,}19)$ b) $\frac{\pi}{8}$

798 Suunnistajan on kierrettävä suo sen reunaa pitkin.

799 6,0 cm

8 Integraalilaskenta

801 a) $x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + C$

b) $\frac{1}{8}(x^2 - 2)^4 + C$

c) $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 9) + C$

802 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{4}{3}$

803 -39

804 a) $-\frac{1}{2}e^{4-x^2} - \frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{9}(x^3 - 4)\sqrt{x^3 - 4} - \frac{25}{9}$

805 $a = 2$

806 a) $e^{\sin x} - 1$ b) $-\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{\cos x} - 1$

807 a) $2e^{\sqrt{x}} + C$

b) $2\sqrt{5x^2 + 2x} + C$

c) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

808 a) $\frac{1}{8}e^{4x^2-3} + C$ b) $-\frac{1}{e^{2x} + 4} + C$

c) $\frac{1}{3}\ln(2 - 3x) + C$

809 a) $e^{\tan x} + C$

b) $-\frac{2}{3}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} + C$

c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + \frac{1}{5}e^{5x} + C$

810 On.

811 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{17}{6}$

812 $F(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + 2, & x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x^2 - 2x + 1, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

$F(-2) = -3$

813 a) $13\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $6\frac{1}{2}$

814 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}35$ c) 49

815 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}(e - 1) \approx 0{,}86$

816 $a = -1\frac{1}{9}$ tai $a = 2$

817 $a = 0$, $a = 1$ tai $a = 2$

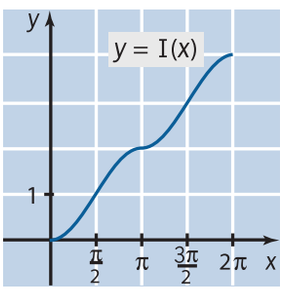
818 a) $A = 2 - 2e$ b) $A = 2$ ja $B \in \mathbb{R}$

819 a) $\frac{2}{3}(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \approx -0{,}55$ b) $e + 1 \approx 3{,}7$

820 -3

821 minimikohta $x = 1$

822 a) $1 - \cos x$ b) $\cos x + 3$



823 pienin arvo $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ja suurin arvo $f(2) = 1\frac{1}{2}$

824 $f(x) = \begin{cases} -7x^2, & x \leq 0 \\ -2x^2, & x > 0 \end{cases}$

825 $f(x) = 600(x - x^2)$

826 a) $1\frac{1}{3}$ b) $1\frac{1}{15}$

827 $10\frac{2}{3}$

828 $e - 1 \approx 1{,}7$

829 $40\frac{1}{2}$

830 10

831 8

832 $\frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4$

833 1

834 $\frac{1}{2}(e^4 + e^{-4} - 2) = \frac{(e^4 - 1)^2}{2e^4} \approx 26$

835 a) $\frac{1}{6}$ b) 8

836 a) 32 b) $6\frac{2}{3}$

837 $2\frac{1}{3}$

838 $\frac{1}{12}$

839 1

840 $a = 1$

841 $a = 1$ tai $a = -2$

842 $k = -6$ tai $k = 6$

843 3:1

844 $\frac{142\pi}{5} \approx 89$

845 $\frac{284\pi}{7} \approx 130$

846 $\frac{27\pi}{2} \approx 42$

847 $\frac{248\pi}{3} \approx 260$

848 $\frac{512\pi}{15} \approx 110$

849 $48\pi \approx 150$

850 $\frac{3\pi}{10} \approx 0{,}94$

851 $\frac{\pi(e^2 - 1)}{4} \approx 5{,}0$

852 $\frac{\pi}{10} \approx 0{,}31$

853 a) $12\pi \approx 38$ b) $8\pi \approx 25$

854 $\frac{17\sqrt{3}}{10}\pi \approx 9{,}3$

855 a) $\frac{4\pi}{3} \approx 4{,}2$ b) $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$

856 $\frac{127\pi}{810} \approx 0{,}49$

857 $a = 2$

858 a) 100 cm^3 b) 180 cm^3 c) 0,55 kg
d) 7,6 cm

859 a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$ b) $\frac{4 - \pi}{2} \approx 0{,}43$

860 a) $a = -\frac{7}{4}$ b) $a = \frac{1}{2}$

861 a) $F(x) = x + \ln(-x) + 2, \ x < 0$
b) $2\sin^2 x - \tan x + 2$

862 On.

863 $\frac{1}{12}$

864 $1\frac{1}{8}$

865 a) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$ b) $\frac{4^{3x}}{3\ln 4} - 2x + C$

866 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C, & x \le -2 \\ -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} + C, & -2 < x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{8}{3} + C, & x \ge 0 \end{cases}$

867 $\frac{3\pi + 2}{9\pi - 2} \approx 0{,}43$

868 $\frac{2}{3}$

869 a) $\frac{1}{\cos x} + \cos x + C$ b) $\ln|\ln(x + 1)| + C$

870 $x = -3, \ x = 0$ tai $x = 6$

871 2:3

872 $\frac{4}{3}$

873 2; arvo ei riipu vakiosta k

874 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

875 $a = 6$

876 -3

877 $\frac{45\pi}{4} \approx 35$

878 $f(x) = x + \frac{1}{2}e^{-2x} + 1\frac{1}{2}$

879 $\frac{8\pi}{3} \approx 8{,}4$

880 $I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}, \ I_1 - I_2 = 0, \ I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}.$

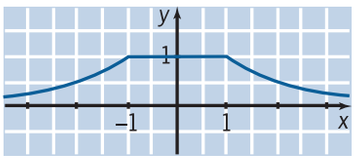
881 $A = 1\frac{1}{5}$ ja $B = 2\frac{4}{5}$

882 $f(x) = 12x - 6$; saa

883 $\pi(e^2 - 4e + 5) \approx 4{,}76$

884 $F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \ge 0, \end{cases} \quad F(-2) = 1$

886



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{kun } x < -1 \\ 1, & \text{kun } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

887 $f(x) = x + \ln(-x) + 3$

888 suurin arvo $f(3) = 2$ ja pienin arvo $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

889 $\frac{333\pi}{10} \approx 100$

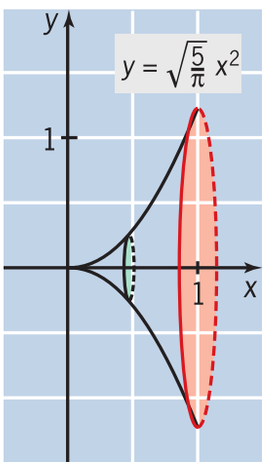
890 $\pi \int_{-2}^{2} \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - x^2}\right)^2 dx$

891 $f'(7) = -5\sqrt{2}$

892 $f'(x) = 3\sqrt{9x^2+1} - \sqrt{x^2+1}$, ei ääriarvoja

893 $G'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - G(x)]$

894 $f(x) = \sqrt{\frac{5}{\pi}}x^2$



895 660 m^3

896 2,5 km^2, korvaus 2 875 000 mk

897 a) 0,30 b) 0,16

898 ala $\frac{z^2}{4} + 11z + 105$, tilavuus 1,2 litraa

899 $\frac{7}{12} \approx 0{,}58$

9 Lukujonot ja summat

901 a) $\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}$

902 3, 2, 0, –4, –12

905 $a_6 = -1904$

908 $a_n = \frac{3}{n!}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

909 pienin arvo $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

910 Pienin termi on $a_1 = 1\frac{25}{29}$ ja suurin termi on $a_{13} = 10\frac{136}{197}$.

911 $c_3 = 2\sqrt{5}$

912 $a_{35} = -181$, $S_{35} = -2765$

913 $S_{30} = 1095$

914 38 kpl

915 a) $a_1 = -218\frac{5}{6}$ b) 526 kpl

916 a) 4 b) 388 c) $4n$ d) $4n - 24$

917 a) ei b) on

919 36,9°

920 a) 2500 € b) 5000 € c) 2562,50 € d) 51250 €

922 $a_{11} = -354\,294$, $S_{10} = 88\,572$

923 a) $\frac{3}{16}$ b) –19 683

924 a) $a_5 = \pm 20$ b) $a_1 = \pm\frac{5}{4}$ c) $a_{20} = 5 \cdot 2^{17}$

925 a) 27,8 tuumaa b) 12,4 tuumaa c) 7 kertaa

926 a) $q = \sqrt[7]{7}$

b) $a_n = \frac{2}{5}(\sqrt[7]{7})^{n-5}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

928 14 kpl

929 a) 9830,40 € b) 10,3 vuoden kuluttua

930 1° 30 2° 40

931 9. sijoituksen jälkeen

932 a) 5710 € b) 5 v 1 kk

933 a) 49 574 € b) 41 vuotta

934 Suhdeluvut ovat a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

936 a) $a_{1000000} = 2^{500001} - 2 \approx 2{,}0 \cdot 10^{150515}$

b) $S_{1000000} = 3 \cdot 2^{500001} - 1500006 \approx 6{,}0 \cdot 10^{150515}$

937 minimit $f(0) = 0$ ja $f\left(\frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{5\pi}{4}} (e^{-2\pi})^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

maksimit $f\left(\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} (e^{-2\pi})^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

938 $f'(x) = -2e^{-x} \sin x$

Kevään 2007 ylioppilaskoe

1 a) $x = 0$ tai $x = \frac{6}{7}$ b) $-\frac{2}{3} < x < 2$ c) $\sqrt{a}$

2 a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $-x^2$

3 a) 5,6 % b) 4,14 %

4 $2\bar{i} - 10\bar{j} - 9\bar{k}$

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 10t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 6 - 9t \end{cases}$$

$(\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, 0)$

5 $\frac{25}{4}$

6 $-5 < x < -1$ tai $x > 3$

7 2

8 $a = 1$ ja todennäköisyys on $\frac{3}{8}$.

9 35,3° ja 90°

10 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$

11 esimerkiksi $f(x) = e^x$

12 tarkka arvo ln 3, likiarvo 1,11667, suhteellinen virhe 1,64 %

14 a) $f(x) = \frac{x}{1 - x}$ b) $\frac{|x|^{n+1}}{1 - x}$ c) 6

Hakemisto

aidosti kasvava lukujono 192
aidosti monotoninen lukujono 192
aidosti vähenevä lukujono 192
alkeisfunktiot 152
alkeistapaus 119
analyysin peruslause 181
analyyttinen muoto (lukujonon) 191
aritmeettinen lukujono 194
aritmeettinen summa 194
aste 42

binomijakauma 129
binomitodennäköisyys 126
Bolzanon lause 147

derivoimissääntöjä 149
derivoituvan funktion monotonisuus 148
ensimmäisen asteen polynomifunktio 152
diskreetti jakauma 129
diskriminantti 27

ehdollinen todennäköisyys 121
eksponenttifunktio 160
ensimmäisen asteen epäyhtälö 24
ensimmäisen asteen yhtälö 24
erilliset tapahtumat 119
erisuuntaiset vektorit 97
erotusluku 194

Fermat'n lause 171
funktio 138
funktion raja-arvo 141

geometrinen lukujono 197
geometrinen summa 197
geometrinen todennäköisyys 120

integraalifunktio 175
integroimissääntöjä 175
itseisarvo 16
itseisarvoepäyhtälö 37
itseisarvoyhtälö 35

janan keskipiste 82
jatkuva jakauma 131
jatkuvia funktioita 143
jatkuvuus 142
juuri 19

kaaren pituus 65
kaksinkertaisen kulman sini ja kosini 45
kantavektoriesitys 98
kappaleen tilavuus 188
kartio 77
kasvava lukujono 192
kertolaskusääntö 121
kertymäfunktioksi 132
keskihajonta 129
klassinen todennäköisyys 119
kolmioiden yhdenmuotoisuuslause 71
kolmion merkilliset pisteet 59
kolmion pinta-ala 56
kombinaatioiden lukumäärä 117
komplementtisääntö 121
komplementtitapahtuma 119
korkeamman asteen epäyhtälö 32
korkeamman asteen polynomifunktio 153
korkeamman asteen yhtälö 29
kosini 42, 55
kosinifunktio 158
kosinilause 56
kosiniyhtälö 47
kulmakerroin 84
kulmanpuolittajalause 59
kuvaus 138
käyrien välinen kulma 151
käyrän yhtälö 82
käänteisfunktio 139
käänteisfunktion derivaatta 163
käänteisluku 7
kääntäen verrannollinen 11

laskujärjestys 8
lieriö 75
logaritmi 160

logaritmifunktio 160
lukujono 191

mittakaava 69
monikulmio 53
monotoninen lukujono 192
muistikaavat 21
murtopotenssi 19
määrätty integraali 180

neliö 62
neliöjuuri 18
neliöjuuriepäyhtälö 40
neliöjuuriyhtälö 40
neliöönkorotuslause 37
neljäkäs 62
nollavektori 97
normaalijakauma 134
normitettu normaalijakauma 133
normittaminen 134

odotusarvo 129
oikealta jatkuva 142
oikeanpuolinen raja-arvo 141
osittaisintegrointi 175

paikkavektori 101, 105
pallo 80, 108
pallon yhtälö 108
paraabeli 93
parillinen juurifunktio 155
parillinen potenssifunktio 155
pariton juurifunktio 155
pariton potenssifunktio 155
permutaatioiden lukumäärä 116
perusjoukko 119
pinta-ala 184
pisteen etäisyys suorasta 85
pistetodennäköisyys 119
pistetulo 99
Platonin kappaleet 73
potenssi 8
prosentti 13
puolisuunnikas 62
Pythagoraan lause 55
pyörähdyskappaleen tilavuus 188
päättymätön lukujono 191
päättyvä lukujono 191

radiaani 42
raja-arvo 141
rationaaliepäyhtälö 34
rationaaliyhtälö 33
rekursiivinen muoto (lukujonon) 191
ryhmittely 21

samansuuntaiset vektorit 97
samat vektorit 97
satunnaismuuttuja 127
segmentin ala 65
sektorin ala 65
sini 42, 55
sinifunktio 158
sinilause 56
siniyhtälö 47
sivuavat käyrät 151
suhdeluku 197
summaperiaate 115
suoraan verrannollinen 10
suorakulmio 62
suoran esitys koordinaattimuodossa 109
suoran esitys vektorimuodossa 108
suoran kaltevuus 84
suoran normaalivektori 85
suoran suuntavektori 84, 85
suorien kohtisuoruus 85
suorien välinen kulma 85
suorien yhdensuuntaisuus 85
suotuisa alkeistapaus 119
suunnikas 62
suuntakulma 84
symmetriset alkeistapaukset 119
säännöllinen monitahokas 73

tangentti 42, 55
tangenttifunktio 158
tangenttiyhtälö 47
tapahtuma 119
tason pisteiden etäisyys 82
tason yhtälö normaalimuodossa 112
tason yhtälö vektorimuodossa 111
tekijöihin jakaminen 21
tiheysfunktio 131, 132
tilastollinen todennäköisyys 120
tilavuus 188

todennäköisyys 119
todennäköisyysmassa 132
toisen asteen epäyhtälö 28
toisen asteen polynomifunktio 153
toisen asteen yhtälö 26
toisensa poissulkevat tapahtumat 119
toispuolinen jatkuvuus 142
trigonometrian peruskaava 45
tuloperiaate 115

vakiofunktio 152
variaatioiden lukumäärä 116
varianssi 129
vasemmalta jatkuva 142
vasemmanpuolinen raja-arvo 141
vastakkaissuuntaiset vektorit 97
vastaluku 7
vastatapahtuma 119
vastavektori 97
vektoreiden välinen kulma 97
vektori 97
vektorit *xy*-koordinaatistossa 101
vektorit *xyz*-koordinaatistossa 105
vinoneliö 62
vähenevä lukujono 192

yhdenmuotoisuus 69
yhdensuuntaiset vektorit 97
yhdistetty funktio 138
yhteenlaskusääntö 121
yhtälöryhmä 51
yksikkövektori 97
yleinen normaalijakauma 134
ympyrä 65, 90
ympyrän yhtälö 90

ääriarvot 165